第28卷 第5期
2007年9月

吉首大学学报(自然科学版)
Journal of Jishou University (Natural Science Edition)

Vol. 28 No.5
Sept. 2007

文章编号:1007-2985(2007)05-0029-05

巨灾指数模型及其衍生品套利定价方法*

周 俊
(湖南科技大学商学院,湖南 湘潭 411201)

摘 要:考虑短期随机利率下,损失指数价值过程为跳-扩散模型时巨灾指数衍生品的定价问题,利用有套利定价的保险精算方法得到了巨灾选择权、巨灾债券的精确定价解和买权卖权间的平价关系,并与传统无套利方法下巨灾指数衍生品的定价进行了比较,从而推广了保险精算定价法相关结论.

关键词:巨灾指数;随机利率;复合Poisson过程;保险精算
中图分类号:F830.9;O211.6 文献标识码:A

由于全球范围内巨灾发生的频率不断上升,损失越来越严重,巨额保险赔付的传统经营方式受到严重挑战.20世纪90年代以来,日益增加的对巨灾保险的需求引发了保险领域的金融创新,并导致了其向期货、选择权的方向发展,由巨灾风险证券化的方式,将区域性的巨灾损失风险转移到整个资本市场;资本市场的引入不仅可以使天然巨灾风险的价格能更有效地被发现,而且让保险公司得以规避天然巨灾导致的核保损失;具有代表性的巨灾金融衍生品有巨灾债券、巨灾选择权和灾后股权融资等等.金融市场中的金融衍生产品以其较低廉的交易成本、流动性和无坏帐风险(free default risk)等优势,在保险业务中的风险管理中具有很大的潜力.笔者分析了巨灾指数证券化产品(如巨灾债券和巨灾指数选择权)的运作原理和基本定价理论;在短期利率服从均值回复的Vacisek模型,巨灾损失指数价值过程为带Poisson跳的几何Brown运动的基础上,用保险精算方法讨论了巨灾债券和巨灾指数选择权的定价问题,给出了定价解析式和平价关系式,并与传统无套利定价方法进行了比较.

1 巨灾指数证券化产品的运作原理及定价理论

由于受到全球温室效应的影响,近几年来天然巨灾的发生频率与损害程度都有逐渐增加的趋势,使得国际再保险市场的承保能量明显萎缩.1992年,CBOT推出了巨灾期货,通过建立一巨灾损失指数,巨灾期货据此指数的变动而进行交易;在巨灾衍生商品的不断改进及创新下,1995年,CBOT又设计出一种较为成功的新型巨灾指数选择权——PCS选择权(PCS Option).根据实证资料显示[1],PCS Option可视为一种零市场风险(zero-beta)的投资工具,能够有效降低投资组合的风险,所以国际投资机构也纷纷进入该市场,使得交易量有明显增加的趋势.

PCS巨灾指数选择权以其定义的PCS巨灾损失指数作为天然巨灾选择权的交易标的物,而不是某具体的金融资产.该指数的高低反应全美某些地区巨灾事故造成的损失大小.一旦巨灾损失大于预期,选择权价格上升,保险公司可以通过出售所持有的选择权合同的盈利中弥补赔款损失,反之则选择权损失可以

* 收稿日期:2007-04-28
基金项目:湖南省自然科学基金资助项目(06JJ20019);湖南省社会科学基金资助项目(06YB63);产业经济研究基地开放基金项目(KF0610)
作者简介:周 俊(1970-),女,湖南湘潭人,湖南科技大学商学院讲师,硕士,主要从事概率论与数理金融研究.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由承保盈余中加以弥补, 从而可将保险公司的赔付稳定在预期水平上, 尽量减少巨灾的发生对保险公司的冲击. 通过买入一个CBOT选择权价差, 保险人能得到类似再保险的赔付. PCS巨灾指数选择权根据交易时间地区、延续期限及指数价差大小设计多样化, 较之巨灾期货可提供更高的避险功用; 更由于损失指数与股票市场没有关联性, 投资巨灾选择权可以使投资者的组合多样化, 从而降低系统风险.

巨灾风险证券化的另一种重要而热门的产品之一是巨灾债券, 一般是由专设的再保险信托机构(SPV)发行. 其特点是巨灾债券利息的支付或本金的偿还, 完全依据巨灾损失的发生情况而定. 如果在期内没有发生任何债券契约上所载明的自然灾害, 那么保险人将支付债券投资人票面利息及偿还本金; 否则投资人将依约定放弃部分或全部利息或本金. 巨灾债券具有无信用风险、基差风险较低、增加承保能力、稳定再保险市场价格及降低投资组合风险等特点, 具有不容忽视的发展潜力.

对于巨灾衍生品的定价, Black-Scholes模型得到了广泛应用. 考虑到灾害损失的跳跃性, Cummins J D等[2]用扩散加跳跃过程模型模拟损失过程, 并用套利思想讨论了巨灾期货选择权定价问题; Christensen C V等[3]讨论了PCS选择权定价, 通过对巨灾发生期和调整期的巨灾损失指数建立厚尾模型, 在基于一定的分布假设下, 给出巨灾选择权在各个时刻价格的唯一显示表达式; Aase K[4]建立均衡模型对巨灾期货及基于该期货的金融衍生品定价; 2001年, Alexander Murmann在损失指数服从复合泊松过程的前提下, 利用傅立叶分析给出了无套利价格的一个闭型表达式, 得到了唯一等价鞅意义下保险产品的价格; 国内学者2003年华东师范大学的韩天雄[5]运用均衡定价理论, 假设保险人对风险偏好为指数效用形式, 给出了巨灾证券产品定价的显式表达式.

2　巨灾指数模型及选择权套利定价的保险精算方法

巨灾风险损失指数(如PCS)的价值过程表示为I_t. 设概率空间为(Ω, F_t, P), Ω为状态集, P为Ω上概率测度. $\{W_i(t): 0 \leqslant t \leqslant T\}_{i=1,2}$是2个标准Brown运动; $\{N(t): 0 \leqslant t \leqslant T\}$为强度参数为$\lambda$的Poisson过程, 表示$[0, t]$时间段内随机跳跃次数; $\{U_j: j \geqslant 1\}$为取值于$(-1, +\infty)$的独立同分布(i. i. d.)随机序列, 表示时刻τ_j发生跳跃的幅度, $(1+U_j)$服从对数正态分布, 即有$\ln(1+U) \sim N\left(\ln(1+\theta) - \frac{1}{2}\sigma_U^2, \sigma_U^2\right)$; θ是U_j的无条件期望, 表示由于巨灾发生带来的平均损失; 设过程$W_1(t), W_2(t), N(t)$和U_j相互独立, $\{F_t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$为由$W_1(s), W_2(s), N(s)(s \leqslant t)$和$U_j 1_{\{j \leqslant N_t\}}(j \geqslant 1)$生成的$\sigma-$域, 表示所有到达市场的信息流. $W_1(t), W_2(t), N(t)$和U_j分别代表非巨灾自然灾害损失的波动性、利息率的波动性、巨灾发生频率及巨灾灾害强度.

1) 巨灾风险损失指数由一个Poisson跳扩散过程驱动, 在实际历史概率P下I_t满足:

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{I(t^-)} = (\mu(t) - \lambda\theta)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}W_1(t) + U\mathrm{d}N(t). \tag{1}$$

2) 在概率P下无风险利率$r(t)$为均值回复过程模型(a, b和γ是常数):

$$\mathrm{d}r(t) = a(b - r(t))\mathrm{d}t + \gamma \mathrm{d}W_2(t). \tag{2}$$

通常情况下, 由于巨灾衍生产品处于不完全市场环境, 巨灾损失指数选择权标的不可交易性, 由传统的无套利定价理论, 其价格是不唯一的. 巨灾衍生品的现金流支付依赖于巨灾的发生, 不能通过市场上已经交易的其他股票和债券组成传统的资产组合来近似, 因此无套利定价理论无法直接用于巨灾风险衍生品的定价. 另一方面, 对于不完全市场环境下的传统选择权定价, Bladt M等[6]提出了保险精算方法. 在无任何市场假设且利率为常数情况下, 利用公平保费原则, 证明了当股票价格服从几何Brown运动时保险精算定价与无套利定价一致, 给出的选择权价格与股票价格的实际分布特别是期末的分布有关.

假设市场无摩擦, 无交易费用, 交易是时间连续的, 借贷无限制且利率相同.

由公平保费原理将选择权定价转换为保险问题的基本思想[6], 类似给出以下定义:

定义1　风险损失指数价值过程$I(t)$在$[0, t]$产生的期望价值损失率$\int_0^t \beta(s)\,\mathrm{d}s$定义为$e^{\int_0^t \beta(s)\,\mathrm{d}s} =$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\frac{EI(t)}{I}$, 其中 $\beta(t)$ 称为连续复利价值损失率(类似于股票在 t 时刻的瞬时收益率).

定义 2　基于风险损失指数的巨灾选择权在现在时刻的价值定义为: 损失指数选择权到期日价值按期望价值损失率折现的现值与执行价(看作是无风险资产债券)按无风险利率折现的现值之差, 在损失指数价值实际分布的概率测度下的数学期望值, 这一定价称为巨灾选择权的保险精算定价. 巨灾选择权在到期日被执行的充要条件是, 买权(卖权)为损失指数选择权到期日价值按期望损失率折现的现值与执行价按无风险利率折现的现值的差大于(小于) 0. 即

$$\begin{aligned} C(K,T) &= E[(e^{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t} I(T) - e^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t} K) 1_{[e^{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t} I(T) > e^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t} K]}], \\ P(K,T) &= E[(e^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t} K - e^{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t} I(T)) 1_{[e^{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t} I(T) < e^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t} K]}]. \end{aligned} \tag{3}$$

以下计算巨灾买权的保险精算价值.

定理 1　在模型(1), (2) 下, 巨灾选择权买权 $C(K,T)$ 在 0 时刻的价格为

$$C(K,T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} [I e^{-\lambda\theta T + n\ln(1+\theta)} \Phi(d_n) - K e^{-A(t,T,r) + \frac{1}{2}\sigma_\eta^2} \Phi(d_n - \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + n\sigma_U^2})]. \tag{4}$$

其中: $d_n = \ln\frac{I}{K} + A(0,T,r) - \lambda\theta T + n\ln(1+\theta) + \frac{1}{2}(n\sigma_U^2 + \sigma_\xi^2) / \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + n\sigma_U^2}$; $\sigma_\xi^2 = \int_0^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s$, $\sigma_\eta^2 = \frac{\gamma^2}{a^2}\int_0^T (1 - e^{-a(T-s)})^2 \mathrm{d}s$; $A(0,T,r) = \frac{1}{a}(b e^{aT} - r e^{-aT}) + \frac{r-b}{a} - bT$.

证明　因为(1) 式有解 $I(t) = I\exp\{\int_0^t [\mu(s) - \lambda\theta - \frac{1}{2}\sigma^2(s)]\mathrm{d}s\} + \int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}W(s) + \sum_{j=0}^{N(t)} \ln(1+U_j)\}$, 由 $W(t)$, U_j 与 $N(t)$ 相互独立, 且 U_j 独立同分布, $E[\prod_{j=0}^{N(t)}(1+U_j)] = e^{\lambda\theta T}$, 所以有 $\exp\{\int_0^T \beta(s)\mathrm{d}s\} = \frac{EI(T)}{I} = \exp\{\int_0^T \mu(s)\mathrm{d}s\}$.

对短期利率 $r(t)$, 分别记 $\eta = \gamma\int_0^T \mathrm{d}W_2(s)\int_s^T e^{-a(u-s)}\mathrm{d}u$, $\xi = \int_0^T \sigma(s)\mathrm{d}W_1(s)$, $A(0,T,r) = r\int_0^T e^{a(s-T)}\mathrm{d}s + ab\int_0^T \mathrm{d}s\int_0^s e^{a(s-u)}\mathrm{d}u$, 有 $\int_0^T r(s)\mathrm{d}s = A(0,T,r) + \eta$. 选择权买权到期日被执行的充要条件 $\exp\{-\int_0^T \beta(s)\mathrm{d}s\} I(T) > \exp\{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s\} K$, 等价于

$$\xi + \eta + \sum_{j=0}^{N(T)} \ln(1+U_j) > \ln\frac{K}{I} - A(0,T,r) + \lambda\theta T + \frac{1}{2}\sigma_\xi^2.$$

记 $\zeta = \sum_{j=0}^{n}\ln(1+U_j)$, 有条件分布 $\xi + \eta + \zeta \sim N(n\ln(1+\theta) - \frac{1}{2}n\sigma_U^2, \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + n\sigma_U^2)$. 因此,

$$\begin{aligned} &E[(e^{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t} I(T) - e^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t} K) 1_{[e^{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t} I(T) > e^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t} K]} \mid N(t) = n] = E[(I e^{-\lambda\theta T - \frac{1}{2}\sigma_\xi^2 + \xi + \zeta} - \\ &K e^{-A(t,T,r) - \eta}) 1_{[\xi + \eta + \zeta > \ln\frac{K}{I} - A(t,T,r) + \lambda\theta T + \frac{1}{2}\sigma_\xi^2]} \mid N(t) = n] = I e^{-\lambda\theta T + n\ln(1+\theta)} \Phi(d_n) - \\ &K e^{-A(t,T,r) + \frac{1}{2}\sigma_\eta^2} \Phi(d_n - \sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + n\sigma_U^2}). \end{aligned}$$

由全期望公式, 即得(4) 式.

由保险精算定义(3), 显然有平价关系式:

$$P(K,T) + I = C(K,T) + e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s} K.$$

如果在前叙市场模型基础上增设: (i) 投资者对于灾害所产生的跳跃是风险中性的; (ii) 短期利率的变化以及风险损失指数中所有非巨灾引起的变化都能通过市场存在的其他衍生产品来复制. 那么, 可以将完全市场上可交易资产标的衍生产品定价方法, 推广到基于风险损失指数 I_t 的未定权益定价[7]. 若市场不存在套利机会, 则由以上假设及 Gisanov 定理, 存在 P 的等价鞅测度 Q, 对基于 I_t 的未定权益 C_I, 有 $C_I(t) = E^Q[e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} C_I(T) \mid F_t]$.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

在中性 Q 中下,损失指数 I_t 和利率 r_t 的波动过程分别为

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{I(t^-)}=(r(t)-\lambda\theta)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}\widetilde{W}_1(t)+U\mathrm{d}N(t),$$

$$\mathrm{d}r(t)=a(\widetilde{b}-r(t))\mathrm{d}t+\gamma\mathrm{d}\widetilde{W}_2(t).$$

其中:$\mathrm{d}\widetilde{W}_1=\mathrm{d}W_1+\pi(t)\mathrm{d}t,\mathrm{d}\widetilde{W}_2=\mathrm{d}W_2+\pi_r(t)\mathrm{d}t$, $\widetilde{W}_1,\widetilde{W}_2$ 为对应于 Q 的标准 Brown 运动; I_t 自然风险的市场价格为 $\pi(t)$; $\widetilde{b}=b-\pi_r\gamma/a$; $-\pi(t)$ 表示无风险债券的风险溢价. 对基于风险损失指数 I_t 的巨灾选择权,其0时刻价格为

$$C(K,T)=E^Q[\exp\{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s\}(I-K)^+].$$

容易得到,在该市场模型下巨灾指数选择权具有相同的定价式(4). 这说明在随机利率和跳-扩散的损失指数模型下,巨灾选择权的保险精算方法和无套利定价方法依然是一致的,推广了文献[8]的结论.

3 巨灾债券定价的保险精算方法

假设:巨灾债券所使用的损失指数为PCS指数;利率和巨灾损失指数见假设(1),(2);巨灾债券为零息票,面额为 F,到期日为 T;巨灾债券约定的触发损失水平为 K;τ 表示损失指数首达触发水平 K 的时刻,$\tau=\min\{t\geqslant 0, I_t\geqslant K\}$;当约定触发事件发生后,投资人只能收回 $(1-\omega)F(0<\omega<1)$. 用 P_0 表示零息票巨灾债券在0时刻的价格,则由保险精算定价法有以下结论:

定理2 巨灾债券在0时刻的价格为 $P_0=FD_0[1-\omega E1_{[\tau\leqslant T]}]$,其中 $D_0=\mathrm{e}^{-A(0,r,T)+\frac{\sigma_\eta^2}{2}}$,为无风险债券0时刻价格. 特别地,当巨灾损失都表现为经济的大幅跌落或重创时,损失指数的跳跃意味着债券触发事件发生,此时的巨灾债券的价格有闭式解:

$$E1_{[\tau\leqslant T]}=(1-\mathrm{e}^{-\lambda T})+\mathrm{e}^{-\lambda T}[N(d_1)+(\frac{I_0}{K})^{1-2\mu/\sigma^2}N(d_2)].$$

其中:$d_1=\dfrac{\ln(I_0/K)+(\mu-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$; $d_2=\dfrac{\ln(I_0/K)-(\mu-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

证明 巨灾债券在到期日的现金流量为 $F1_{[\tau\leqslant T]}+\omega F1_{[\tau>T]}=F-\omega F1_{[\tau\leqslant T]}$,由保险精算方法,将到期日现金收益用无风险市场利率贴现,有

$$P_0=E[\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}F(1-\omega 1_{[\tau\leqslant T]})]. \tag{5}$$

由 $W_1(t)$, U_j 和 $N(t)$ 与 $W_2(t)$ 相互独立,令 $D_0=E[\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}]$(无风险债券0时刻价格),(5)式即为 $P_0=FD_0E[(1-\omega 1_{[\tau\leqslant T]})]=FD_0[1-\omega E1_{[\tau\leqslant T]}]$. 当巨灾损失表现为经济的重创时,用 A 表示有巨灾发生(损失指数发生跳跃)的事件,由条件期望及几何 Brown 运动首达时刻 τ 的分布(设 σ 为常数),得

$$E1_{[\tau\leqslant T]}=E[1_{[\tau\leqslant T]}\mid A]P[A]+E[1_{[\tau\leqslant T]}\mid \bar{A}]P[\bar{A}]=$$

$$(1-\mathrm{e}^{-\lambda T})+\mathrm{e}^{-\lambda T}[N(d_1)+(\frac{I_0}{K})^{1-2\mu/\sigma^2}N(d_2)].$$

类似于前面无套利假设下选择权的定价,在用相同的无风险利率折现时,由于无套利假设下损失指数价值的预期率 $r(t)$ 与实际损失率 μ 不同,因此二者的价格显然不同. 此时保险精算定价是有套利的.

4 结语

利用套利定价的保险精算方法,讨论了短期随机利率及 Poisson 跳-扩散损失指数模型下巨灾选择权和巨灾债券的保险精算价值,并分别得到了其定价解析式. 与其他方法相比,由于这种方法对金融市场无经济假设,因此对巨灾衍生证券的定价有一定的意义. 巨灾损失指数还有其他多种重尾模型,有待进一步分析和比较. 由于中国自然灾害损失增加,如果能考虑妥善规划转移巨灾风险的方法,通过巨灾衍生产品方式来分散风险,那么将能给人们提供有益的借鉴和有效的保障.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参考文献:

[1]　HELYETTE GEMAN, YOR M. Bessel Process, Asian Options, and Perpetuities [J] . Mathematical Finance, 1993, (4) : 349- 375.

[2]　CUMMINS J D, GEMAN H. Pricing Catastrophe Insurance Futures and Call Spreads: An Arbitrage Approach [J] . Journal of Fixed Income, 1995, (1) : 46- 57.

[3]　CLAUS VORM CHRISTENSEN, HANSPETER SCHMIDLI. Pricing Catastrophe Insurance Products Based on Actually Reported Claims [J] . Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 27(2) : 189- 200.

[4]　KNUT AASE. An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads [J] . The GENEVA Papers on Risk and Insurance-Theory, 1999, 24(1) : 69- 96.

[5]　韩天雄, 陈建华. 巨灾风险证券化产品的定价问题 [J]. 保险研究, 2003, (12): 31- 34.

[6]　BLADT M, RDBERG T H. An Actuatial Approach to Option Pricing Under the Physical Measure and Without Market Assumptions [J] . Insurance: Mathematics and Economics, 1998, 22(1) : 65- 73.

[7]　VICTOR E VAUGIRARD. Pricing Catastrophe Bonds by an Arbitrage Approach [J] . The Quarterly Review of Economics and Finance, 2003, 43(1) : 119- 132.

Catastrophe Index Model and Insurance Actuary Pricing of the Derivatives

ZHOU Jun

(College of Business, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, Hunan China)

Abstract: Under jump-diffusion catastrophe index model, the author analyzes the pricing of catastrophe derivatives under stochastic interest rates with a compound Poisson process. By using the approach of insurance actuary pricing, the formulas of values of catastrophe options and catastrophe bonds are obtained.

Key words: catastrophe options; stochastic interest rates; compound Poisson process; insurance actuary pricing

(责任编辑　向阳洁)

(上接第 26 页)

References:

[1]　KUANG JICHANG. Applied Inequalities [M] . Ji' nan: Shandong Science and Technology Press, 2004.

[2]　MITRINOVIC D S. Analytic Inequalities [M] . New York: Springer Verlag, 1970.

[3]　HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. Inequalities [M] . London: Cambridge Univ. Press, 1952.

[4]　GAO Ming-zhe, TAN Li, DEBNATH L. Some Improvements on Hilbert' s Integral Inequality [J] . J. Math. Anal., Appl., 1999, 229: 682- 689.

关于 Carlson 不等式

石艳平[1], 尚小舟[1], 贺乐平[2]

(1. 吉首大学师范学院数学与计算机系, 湖南 吉首　416000; 2. 吉首大学数学与计算机科学学院, 湖南 吉首　416000)

摘　要: 利用精化的 Cauchy 不等式, 对 Landau 不等式进行了改进. 同时, 给出了 Carlson 不等式的一种加强式.

关键词: Carlson 不等式; Landau 不等式; 内积; 范数

中图分类号: O178　　文献标识码: A

(责任编辑　向阳洁)

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net