第 26 卷　第 3 期　　　　吉首大学学报(自然科学版)　　　　Vol. 26　No. 3
2005 年 7 月　　　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　　　Jul. 2005

文章编号: 1007- 2985(2005) 03- 0079- 04

效用无差别定价与投资者风险态度的数量关系

胡　松[1], 杨招军[2]
(1. 湖南大学统计学院, 湖南 长沙　410079; 2. 湖南大学数学与计量经济学院, 湖南 长沙　410082)

摘　要: 利用效用无差别定价原理, 基于某一特殊的效用函数, 通过建立数学模型和求解模型, 得到效用无差别定价, 并给出资产定价与投资者风险态度的数量关系.

关键词: 效用无差别定价; 风险态度; 资产定价
中图分类号: F224.7　　　　文献标识码: A

资本市场要解决的核心问题是在不确定市场环境下金融资产的定价. 围绕这一问题, 在西方形成了以理性预期、有效市场假设、资本资产定价模型、套利定价理论和期权定价为主流的现代资本市场定价理论体系. 对金融资产定价的一种朴素想法是, 估计其未来价值的各种可能性, 然后计算其平均值, 并以这一平均值作为它的估值. 用数学语言来说, 是将金融资产的未来价值看作一个随机变量, 则这个随机变量的数学期望可作为该金融资产的当前价值. 具体应用时, 只要通过一定的方法来估计未来价值的概率分布, 然后计算其数学期望, 就认为问题已经得到解决. 在金融资产定价发展中走出的最重要一步否定了这一方法, 而提出用无套利假设来定价, 在期权定价问题中, 完整的无套利假设将为未来价值这一随机变量赋予特殊的(不同于客观可能性的) 概率分布, 它们之间的关系就称为资产定价基本定理.[1] 如果从数学公理化的角度出发, 传统的资产定价理论都可以归结于 线性定价法则 . 对于完备且完全的市场, 在无套利条件下都可以得到唯一的资产定价; 而对于不完备或不完全的市场, 无套利价格往往对应一个区间[2], 价格选择与投资者的风险态度有关, 从而 线性定价法则 失去作用. 笔者利用效用无差别定价原理, 基于特殊的效用函数类, 研究了效用无差别定价以及它与投资者风险态度的数量关系.

1　基本理论和模型

1.1 效用无差别定价及其性质

考虑一单时期证券市场, 它的 2 个时刻 $t = 0, 1$. 假定在时刻 $t = 0$ 预测时刻 $t = 1$ 时有 S 种可能发生的情形, 称它们为状态, 记作 ${}_1$, ${}_2$, , ${}_S$. 引入 $= \}\ {}_1, {}_2, , {}_S\}$, 称为一个样本空间, 其中有 1 个被揭示为真. $p({}_i) > 0(1\ \ i\ \ S)$ 表示在 ${}_j$ 下发生的概率, 且 $\sum_{i=1}^{S} p_i = 1$. $B = \{B_t : t = 0, 1\}$ 表示固定收益(譬如债券) 过程, $B(0) = 1$, $B(1) = 1 + r$, 其中 r 是无风险利率. 假定市场中有 N 个证券, 这 N 个证券的收益情况由 $N\ \ S$ 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 描述, 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 中的元素 d_{ij} 表示在状态 j 下, i 证券将获得的收益计量数, 证券价格由属于 $\mathbf{R}^N$ 的 $\boldsymbol{q}$ 表示, 则证券组合 $\ \ \mathbf{R}^N$ 的市场价值为 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}$, 收益为 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\ \ \mathbf{R}^S$. $x = {}_0 B(0) + {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}$,

y　收稿日期: 2005- 05- 10
基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(04JJ3009)
作者简介: 胡　松(1977-), 男, 湖南省常德市人, 湖南大学统计学院硕士生, 主要从事金融数学研究; 杨招军(1964-), 男, 湖南省邵阳市人, 博士, 湖南大学数学与计量经济学院教授, 主要从事金融数学研究.

$X(1,\ _j) = \ _0B(1) + \sum_{i=1}^{N} d_{ij}q_i$. 其中: 1 j S; x 表示初始财富; $_0$ 表示拥有固定收益债券计量数; X 表示期末的收益. 同时, 假设市场中存在一不能复制的未定权益 C_T. 设{ , } F_0 F_1 F 为一串 F 的子集族, 如果子集族满足 A, B F_1 A B F_i 且 A F_i $\backslash A$ $F_i (i = 0, 1)$, 则称 F_i 为一个域, F_0, F_1 为一个域流. 所谓未定权益[3] 是指, 对任意 a **R** 的随机变量, $X( )$ 满足{ $| X( )$ a} F_1.

接下的问题是对不能复制的未定权益 C_T 进行定价. 首先来了解效用无差别定价原理[4]. 效用无差别定价是指, 一投资者在期初 $t = 0$ 时, 不投资的最大效用与愿意支付 p^b 而在 $t = 1$ 时得到未定权益 C_1 所获得的最大效用是没有区别的(或者说完全相同). 设投资者开始拥有初始财富 x, 令

$$V(x, k) = \sup_{X\ A(x)} E[U(X + kC_1)], \tag{1}$$

其中 $A(x)$ 表示初始财富 x 在时刻 1 产生的收益所组成的集合. 效用无差别定价原理认为, 未定权益 C_1 的无差别购买价 $p^b(k)$ 应该是

$$V(x - p^b(k), k) = V(x, 0) \tag{2}$$

的解, 即投资者在 $t = 0$ 时最多愿意支付 $p^b(k)$ 购买 k 份未定权益 C_1.

类似地, 效用无差别卖价 $p^S(k)$ 是指, 投资者为了卖出 k 份未定权益而愿意接受的价格, 即 $p^S(k)$ 满足

$$V(x + p^b(k), -k) = V(x, 0). \tag{3}$$

从而易知 $p^b(k) = -p^S(-k)$.

很显然, 从效用无差别定价的定义中可得出如下性质.

性质 1 非线性性.

在资本资产定价模型中, 线性定价法则 的作用很大, 它实际上可概括布莱克 - 肖尔斯期权定价理论以前的金融经济学的几乎所有主要结果, 布莱克 - 肖尔斯期权定价理论无非可归结为 正线性定价法则[2]. 然而, 效用无差别定价提供了一个非线性定价的法则, 因为对于效用函数一般假设为严格凹性, 在(1) 式中, 对投资者来说, 购买 k 份未定权益的价格将低于 k 倍 1 份未定权益的价格; 同理, 对出售者来说, 出售 k 份未定权益的价格将高于 k 倍 1 份未定权益的价格.

性质 2 一致性.

在完备且完全的市场条件下, 传统的资产定价理论与效用无差别定价理论得出的资产定价结论相同.

如果市场是完备且完全的, 未定权益 C_1 是可复制的, 则在无套利条件下, 效用无差别定价 $p(k)$ 等价于在完备市场中 k 份资产的无套利价格 P, 即 $p(k) = kP$.

证明 在单期投资中, 财富的收益率为 R^*, 设 X_1 $A(x)$, $X_1 = x$ $R^* + X_1^*$, X_1^* $A(0)$. 其中 $A(0)$ 表初始财富为 0 的未来可能收益, 有 x $R^* + X_1^*$ $A(x)$. 因为 C_1 是可复制的, 记 P 为完备市场的定价, 所以 $C_1 = P$ $R^* + X_1^t$, 其中 X_1^t $A(0)$. 于是,

$$X_1 + kC_1 = (x + kP)R^* + X_1^* + kX_1^t = (x + kP)R^* + X,$$

$$V(x, k) = \sup_{X\ A(x)} E[U(X + kC_1)] = \sup_{X\ A(x+kP)} E[U(X)] = V(x + kP, 0),$$

其中 X_1 $A(x)$, $X_1 + kC_1$ $A(x + kP)$, X_1^t $A(0)$. 从而 $p(k) = kP$.

性质 3 单调性.

假设 p^i 表示第 i 种未定权益 C_T^i 的价格, 且 C_Y^i C_T^j, 则有 p^i p^j. 它的成立是显然的.

性质 4 凸性.

如果记 p 为未定权益 $C_T^1 + (1-)C_T^2$(其中 $[0, 1]$) 的效用无差别定价, 则有 p $p^1 + (1-)p^2$.

证明 用 X_T^i 表示投资者期初财富 $x - p^i$ 在期末获得未定权益 C_T^i 的最优目标财富, 由(2) 式, 有

$$V(x, 0) = V(x - p^i, 1, C_t^i) = \sup_{X_T\ A(x-p^i)} E[U(X_T + C_T^i)] = E[U(X_T^1 + C_T^i)].$$

设 $X_T^* = X_T^1 + (1-)X_T^2$, 于是 X_T^* $A(x - p^1 - (1-)p^2)$. 所以有

$$V(x - \ p^1 - (1 - \ )p^2, 1, \ C_T^1 + (1 - \ ) C_T^2) = \sup_{x \ A} E[U(X_T + \ C_T^1 + (1 - \ ) C_T^2)]$$

$$E[U(X_T^* + \ C_T^1 + (1 - \ ) C_T^2)] = E[U(\ (X_T^1 + C_T^1) + (1 - \ )(X_T^2 + C_T^2))]$$

$$E[U(X_T^1 + C_T^1) + (1 - \ )]E[U(X_T^2 + C_T^2)] = V(x, 0) =$$

$$V(x - p \ , 1, \ C_T^1 + (1 - \ ) C_T^2).$$

1.2 指数效用函数 $u(x) = - \frac{1}{\ }e^{- \ x}$ 无差别定价模型

下面假设收益 - 价格对($\boldsymbol{D}, \boldsymbol{q}$) 给定, 定义某行为人具有的严格递增效用函数 U: $\mathbf{R}_+^S \ \mathbf{R}$, 以及零禀赋, 预算可行集 $A(x) = \{\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \ \mathbf{R}_+^S: \ \mathbf{R}^N, \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \ 0\}$, 行为人的优化问题可描述为

$$U(X^*) = \sup_{X \ A(x)} U(X). \tag{4}$$

假设某证券组合 ^{0} 满足 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \ ^0 > 0$, 因为效用函数 U 严格递增, 财富约束 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \ ^0 \ 0$ 在最优处一定紧束, 即如果 $X^* = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \ ^*$ 是(4) 式的解, 那么 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \ ^* = 0$.

定理 1[5] 如果(4) 式有解, 则不存在套利; 如果 U 连续且不存在套利, 则(4) 式有解.

证明 如果(4) 式有解, 设 $\bar{\ }$ 是(4) 式的一个最优解, 而市场无套利, 则存在 $\ \mathbf{R}^N$ 为一个套利策略, 使 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \ = 0, \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \ 0$. 从而若定义 $\hat{\ } = \bar{\ } + \ $, 则 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\hat{\ } = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(\bar{\ } + \ ) = 0, \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \ = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(\bar{\ } + \ ) > 0$. 由 U 的严格单调性, 必有 $E[U(\hat{X})] > E[U(\bar{X})]$, 这与 $\bar{\ }$ 的最优性矛盾. 另一方面, 如果市场无套利且 U 连续, 假设(4) 式无解, 则存在递增组合序列 $_i \ \mathbf{R}^N (i = 0, 1, \ )$, 满足 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \ _i = 0, \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \ _i = 0$ 且 $U(X_i) > U(X_j)$, $i > j$. 从而根据 U 的连续性和递增性, 有 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \ _i > \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \ _j$. 令 $^* = \ _i - \ _j$, 则有 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \ ^* > 0$, 但 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \ ^* = 0$ 是一个套利, 矛盾.

进一步假定借贷资产的利率相同, 而且资产可以无限细分, 允许卖空. 考虑只存在唯一不可复制的未定权益 C_T 的不完备市场的定价问题. 对于指数效用函数 $u(x) = - \frac{1}{\ }e^{- \ x}$, 有 $u (x) = e^{- \ x}$, $u (x) = - \ e^{- \ x}$, 从而 Arrow-Pratt 风险厌恶指标 $R(x) = - \frac{u (x)}{u (x)} = \ $, 其中 表示投资者对风险厌恶程度的度量. 将指数效用函数代入(1), (2) 式, 有

$$\sup_{X_1 \ A(x - p(k))} E[- \frac{1}{\ }\exp(- \ (X_1 + kC_1))] = \sup_{X_1 \ A(x)} E[- \frac{1}{\ }\exp(- \ X_1)]. \tag{5}$$

模型(5) 实际上是求 2 个最优化问题[6], 并令它们相等从而解出 $p(k)$. 按照这一思路, 首先考虑(5) 式右边的最优投资问题. 根据定理 1, (5) 式右边一定存在最优投资策略 , 有 $X(1, \ _j) = x \ B(1) + \ \boldsymbol{D}_j^{\mathrm{T}} \ $, 其中 $\ \boldsymbol{D}_j = \boldsymbol{D}_j - \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} B(1)$. 于是有

$$\sup_{X_1 \ A(x)} E[- \frac{1}{\ }\exp(- \ X_1)] = E[- \frac{1}{\ }\exp(- \ (xB(1) + \ \boldsymbol{D}_j^{\mathrm{T}} \ ))]. \tag{6}$$

同理可得(5) 式左边也一定存在最优投资策略 *, 有

$$\sup_{X_1 \ A(x - p(k))} E[- \frac{1}{\ }\exp(- \ X_1 + kC_1)] = E[- \frac{1}{\ }\exp(- \ ((x - p(k)) \ B(1) + \ \boldsymbol{D}_j^{\mathrm{T}} \ ^* + kC_1))]. \tag{7}$$

联立(6), (7) 式, 可得

$$E[- \frac{1}{\ }\exp(- \ (xB(1) + \ \boldsymbol{D}_j^{\mathrm{T}} \ ))] = E[- \frac{1}{\ }\exp(- \ ((x - p(k))B(1) + \ \boldsymbol{D}_j^{\mathrm{T}} \ ^* + kC_1))]. \tag{8}$$

化简(8) 式, 得

$$E[\exp(- \ \ \boldsymbol{D}_j^{\mathrm{T}} \ )] = \exp(\ p(k)B(1)) \ E[\exp(- \ (\ \boldsymbol{D}_j^{\mathrm{T}} \ ^* + kC_1))]. \tag{9}$$

进一步化简, 对(9) 式两边取自然对数, 得

$$p(k) = \frac{1}{\ B(1)}\log\frac{E[\exp(- \ \ \boldsymbol{D}_j^{\mathrm{T}} \ )]}{E[\exp(- \ (\ \boldsymbol{D}_j^{\mathrm{T}} \ ^* + kC_1))]}. \tag{10}$$

1.3 效用无差别定价的经济解释

现在分析(10)式,看它与投资者的风险态度的数量关系. 因为 $p(k) > 0$, 所以 $\frac{E[\exp(-\quad \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}_{j}\ )]}{E[\exp(-\quad (\quad \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}_{j}{}^{*} + kC_1))]} > 1$. 同时, 一般有 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}_{j} > 0$, $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}_{j}{}^{*} > 0$. 于是, 考虑函数 $y = e^{-\ x}(x > 0)$, $y\ (x) = -\ x e^{-\ x} < 0$, $y\ (x) = x^2 e^{-\ x} > 0$, 故随着 的增大, y 减小的速度加快, 即随着 的增大, $\log \frac{E[\exp(-\quad \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}_{j}\ )]}{E[\exp(-\quad (\quad \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}_{j}{}^{*} + kC_1))]}$ 减小, 同时 $\frac{1}{\ }$ 也减小: 所以, (10) 式随 的增大而减小.

根据以上分析可知, 资产的定价与投资者的风险态度有关, 投资者越厌恶风险则对所购买的未定权益要价越低. 这个结果与现实相符, 能够很好地解释现实中的资产定价.

2 结语

从1952年马克维茨的资产组合理论到B-S期权定价理论, 金融的数学公理化之路方兴未艾. 在考虑资产定价的时候, 必须考虑投资者对该资产的预期收益. 当所有的投资者和出售者预期一致时, 就能很好的对资产进行合理的定价[7], 否则资产的定价就与投资者的风险态度有关. 如果假设人是完全理性的, 且资产的定价与投资者风险态度无关, 则这本身就意味着与现实不符. 通过分析, 笔者得到了效用无差别定价, 并给出资产的定价与投资者的风险态度的数量关系, 其结果能很好地与现实相符. 当然, 该结论有它的局限性, 即只考虑了在单时段市场中唯一存在不可复制未定权益定价的情形, 更复杂的连续时段的情形亟待进一步研究.

参考文献:

[1] STANLEY R P. Introduction to Mathematical Finance [M]. Blackwell: Publishers Ltd., 1997.
[2] 史树中. 金融经济学十讲 [M]. 上海: 上海人民出版社, 2004.
[3] 雍炯敏, 刘道百. 数学金融学 [M]. 上海: 上海人民出版社, 2003.
[4] HENDERSON V, HOBSON D. Utility Indifference Pricing an Overview [M]. Princeton University Press, 2004.
[5] DARRELL DUFFIE. Dynamic Asset Pricing Theory(3rd Edition) [M]. Pricnceton University Press, 2001.
[6] 胡运权, 郭耀煌. 运筹学教程(第2版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
[7] 周洛华. 资产定价学 [M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2004.

Quantitative Relation Between Utility Indifference Pricing and the Investor s Risk Attitude

HU Song[1], YANG Zhao-jun[2]
(1. School of Statistics, Hunan University, Changsha 410079, China; 2. School of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: Using the theory of the utility indifference pricing, based on one special utility function, the author obtains the utility indifference pricing via the math model of foundation and solution and presents the quantitative relation between the utility indifference pricing and the risk attitude of the investor.

Key words: utility indifference pricing; risk attitude; asset pricing