第 27 卷　第 3 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 27　No. 3
2006 年 5 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　May. 2006

文章编号: 1007- 2985(2006) 03- 0001- 03

$L_p(\ ,X)$ 逼近的唯一性

罗先发, 王兰芳, 方东辉
(吉首大学数学与计算机科学学院, 湖南 吉首　416000)

摘　要: 设 X 是 Banach 空间, Y 是含原点的闭凸集. 证明了: $L_p(\ ,Y)$ 是 $L_p(\ ,X)(1<p<\ )$ 的 Chebyshev 子集, 等价于 $L_1(\ ,Y)$ 是 $L_1(\ ,X)$ 的 Chebyshev 子集. 此外, 举例说明 g 是 $L\ (\ ,Y)$ 对 $f\ \ L\ (\ ,X)$ 的最佳逼近蕴含对几乎所有的 s 有 $g(s)\ \ P_Y(f(s))$ 是不正确的.

关键词: 最佳逼近; Chebyshev 子集; 闭凸集
中图分类号: O177. 92　　文献标识码: A

1　问题的提出

设(X,　　) 是 Banach 空间, Y 是 X 的非空子集. 对 $x\ \ X$, 若存在 $y\ \ Y$, 使得

$$x-y\ \ = d(x,Y):=\inf\{\ x-z\ :z\ \ Y\},$$

则称 y 是 Y 对 x 的最佳逼近, 其全体记为 $P_Y(x)$. 若对每个 $x\ \ X$, $P_Y(x)$ 非空(是单点集), 则称 Y 在 X 中可近(Y 是 X 的 Chebyshev 子集) .

设(　,　,　) 是完全、正　- 有限测度空间, 1　 $p<\ $ 　($p=\ $), $L_p(\ ,X)$ 是定义在　上且在 X 中取值的 Bochner p - 方可积(　- 可测本性有界) 的函数全体. 对每个 $f\ \ L_p(\ ,X)$, 令

$$f\ \ _p=\begin{cases}(\ \ f(s)\ \ ^p\mathrm{d}\ )^{1\ p} & 1\ \ p<\ ,\\ \mathrm{ess\ sup}\ \ f(s)\ & p=\ ,\end{cases}$$

则 $L_p(\ ,X)$ 是 Banach 空间.

设 Y 是 X 的闭子空间, 一个基本问题是: Y 在 X 中可近与 $L_p(\ ,Y)$ 在 $L_p(\ ,X)$ 中可近有何关系?这个问题自 20 世纪 80 年代初开始就受到广泛关注[1- 7]. Mendoza J[7] 举例说明这个问题的答案一般来说是否定的, 并证明了: 若 Y 可分, 则 $L_p(\ ,Y)$ 在 $L_p(\ ,X)$ 中可近等价于 Y 在 X 中可近. 叶新涛[8] 将此结果推广到 Y 为包含原点的闭凸集的情形. 关于集合的 Chebyshev 性, 石峰[9] 证明了: 如果 Y 是 X 的 Chebyshev 子空间, $L_p(\ ,Y)$ 在 $L_p(\ ,X)$ 中可近, 1　 $p<\ $, 则 $L_p(\ ,Y)$ 是 $L_p(\ ,X)$ 的 Chebyshev 子空间. 笔者将此结果推广到 Y 为一般集的情形.

文中恒设 Y 为 X 的包含原点的闭凸集.

收稿日期: 2006- 02- 28
基金项目: 湖南省教育厅科学研究项目(05C143)
作者简介: 罗先发(1963-) , 男, 湖南省吉首市人, 吉首大学数学与计算机科学学院副教授, 博士, 主要从事 Banach 空间中非线性逼近理论的研究.

2 主要结果

引理 1 设 1 p ,f $L_p($ $,X)$. 定义 $(s) = d(f(s), Y), s$,则 是 – 可测函数且
$$d(f, L_p(\ , Y)) = \ d(f(\ ), Y) \ _p.$$
证明可参见文献[4] 的定理 5.

定理 1 设 Y 是 X 的 Chebyshev 子集, 1 $p <$. 若 $L_p($ $, Y)$ 在 $L_p($ $,X)$ 中可近, 则 $L_p($ $, Y)$ 是 $L_p($ $,X)$ 的 Chebyshev 子集.

证明 设 f $L_p($ $,X)$, 由假设可知, 存在 g_0 $L_p($ $, Y)$, 使得 $f - g_0 = d(f, L_p(\ , Y))$. 由引理 1, 有 $d(f, L_p(\ , Y)) = \ d(f(\ ), Y) \ _p$, 故
$$f(s) - g_0(s) \ ^p \mathrm{d} = [d(f(s), Y)]^p \mathrm{d} .$$
而 $f(s) - g_0(s) \ ^p$ $[d(f(s), Y)]^p$, 于是存在零测度集 A, 使得 $f(s) - g_0(s) = d(f(s), Y)$, s $\backslash A$. 从而由 Y 是 X 的 Chebyshev 子集, 有 $g_0(s) = P_Y(f(s))$, s $\backslash A$. 这说明 $L_p($ $, Y)$ 对 f 的最佳逼近是唯一的. 证毕.

推论 1 设 1< $p <$, 则下列陈述等价: ( ) $L_p($ $, Y)$ 是 $L_p($ $,X)$ 的 Chebyshev 子集; ( ) $L_1($ $, Y)$ 是 $L_1($ $,X)$ 的 Chebyshev 子集. 当 Y 可分时, 上述( ), ( ) 均等价于: ( ) Y 是 X 的 Chebyshev 子集.

证明 ( ) ( ). 仿照文献[7] 的推论 2.7 的证明可知, $L_1($ $, Y)$ 在 $L_1($ $,X)$ 中可近. 于是为证明( ), 由定理 1, 只需证明 Y 是 X 的 Chebyshev 子集. 首先, 由假设及文献[8] 的定理 1 可知 Y 在 X 中可近. 其次, 任取 x X, 取正测度集 A, 令 $f = x \ A$, 其中 A 是特征函数, 则 f $L_p($ $,X)$. 取 y_1, y_2 $P_Y(x)$, 令 $g_1 = y_1 \ A$, $g_2 = y_2 \ A$, 则 g_1, g_2 $L_p($ $, Y)$, 且由引理 1, 有
$$f - g_1 \ _p = \ f - g_2 \ _p = d(x, Y)(\ (A))^{1 \ p} = \ d(f(\ ), Y) \ _p = d(f, L_p(\ , Y)).$$
于是 g_1, g_2 都是 $L_p($ $, Y)$ 对 f 的最佳逼近, 从而由假设有 $g_1 = g_2$, 进而有 $y_1 = y_2$. 这说明 Y 是 X 的 Chebyshev 子集.

( ) ( ). 同理可证.

当 Y 可分时, 若( ) 成立, 则由文献[8] 的定理 2 可知, $L_p($ $, Y)$ 在 $L_p($ $,X)$ 中可近, 这里 1 $p <$. 于是由假设及定理 1 可知( ) 和( ) 均成立. 反之, 若( ) 或( ) 成立, 则由( ) ( ) 的证明可知, Y 是 X 的 Chebyshev 子集. 证毕.

推论 2 设 Y 是 X 的 Chebyshev 子集, $\overline{\mathrm{span}\ Y}$ 自反, 1 $p <$, 则 $L_p($ $, Y)$ 是 $L_p($ $,X)$ 的 Chebyshev 子集.

证明 由文献[8] 的定理 3 可知, $L_p($ $, Y)$ 在 $L_p($ $,X)$ 中可近, 于是由定理 1 即知结论成立.

定理 2[9] 设 Y 为 Banach 空间 X 的闭子空间, 则: ( ) $L_1($ $, Y)$ 是 $L_1($ $,X)$ 的可近子空间的充要条件为 L ($, Y)$ 是 L ($,X)$ 的可近子空间; ( ) $L_1($ $, Y)$ 是 $L_1($ $,X)$ 的 Chebyshev 子空间的充要条件为 L ($, Y)$ 是 L ($,X)$ 的 Chebyshev 子空间.

应该指出的是, 定理 2( ) 是正确的(见文献[7] 的推论 2.7), 但其充分性的证明并不正确. 笔者引用了如下结果: 若 g 是 L ($, Y)$ 对 f L ($,X)$ 的最佳逼近, 则对几乎所有的 s , 有 $g(s)$ $P_Y(f(s))$. 但该结论并不正确, 反例如下:

例 1 设 = [0, 1], 是[0, 1] 中的 Lebesque 可测集全体, 是 Lebesque 测度. 又设 $X = (-$ $, +$), $Y = [0, 1]$, X 中元的范数就是该元的绝对值. 令
$$f(s) = \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{n} & s \quad \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right], n = 2, 3, \quad , \\ 0 & s \quad \left(\dfrac{1}{2}, 1\right] \text{ 或 } s = 0, \end{cases}$$
则 f L ($,X)$. 下证 $d(f, L$ ($, Y)) = 1$. 事实上, g L ($, Y)$, 则 $g(s)$ 1, s . 于是, 对 A , $(A) = 0$, 有

$$\sup_{s \ \setminus A} f(s) - g(s) \quad \sup_{s\ (\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]\setminus A} [f(s) - g(s)] \quad 1 - \frac{1}{n} \quad n = 2, 3, \ .$$

从而 $f - g$ 　1, 这说明 $d(f, L\ (\ ,Y))$ 　1. 另一方面, 取 $g_0(s)$ 　1, 则 g_0 　$L\ (\ ,Y)$, 且 $f - g_0$ 　$= 1$. 从而, $f - g_0$ 　$= d(f, L\ (\ ,Y))$, 故 g_0 是 $L\ (\ ,Y)$ 对 f 的最佳逼近. 但当 s 　$(\frac{1}{2}, 1]$ 时, $P_Y(f(s)) = 0$ 　$g(s)$. 这就说明, 不是对几乎所有的 s 　都有 $g(s)$ 　$P_Y(f(s))$.

Mendoza J[7] 指出, $L\ (\ ,X)$ 没有非平凡的 Chebyshev 子空间, 故定理 2(　) 不正确, 因为 $L_1(\ ,X)$ 有平凡的 Chebyshev 子空间. 同理, 文献[9] 中的定理 3 在 $p =$ 　时也不正确.

参考文献:

[1] KHALIL R. Best Approximation in $L^p(I,X)$ [J]. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1983, 94: 277- 279.

[2] DEEB W, KHALIL R. Best Approximation in $L(X, Y)$ [J]. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1988, 104: 527- 531.

[3] KHALIL R, DEEB W. Best Approximation in $L^p(I,X)$(II) [J]. J. Approx. Theory, 1989, 59: 296- 299.

[4] LIGHT W A. Proximinality in $L_p(S, Y)$ [J]. Rocky Mountain J. Math., 1989, 19(1): 251- 259.

[5] KHALIL R, SAIDI F. Best Approximation in $L_1(I,X)$ [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1995, 123(1): 183- 190.

[6] SAIDI F. On the Smoothness of the Metric Projection and Its Application to Proximinality in $L^p(S,X)$ [J]. J. Approx. Theory, 1995, 83: 205- 219.

[7] MENDOZA J. Proximality in $L_p(\ ,X)$ [J]. J. Approx. Theory, 1998, 93: 331- 343.

[8] YE Xin-tai, XU Xiu-bin, LUO Xian-fa. Best Approximation in $L_p(\ ,X)$ [J]. Commu. Appli. Nonlinear, 2005, 12(4): 29- 36.

[9] 石　峰. $L_p(\ ,X)$ 中的性质(U) [J]. 武汉大学学报(自然科学版), 1997, 43(5): 560- 564.

Uniqueness of Approximation in $L_p(\ ,X)$

LUO Xian-fa, WANG Lan-fang, FANG Dong-hui

(College of Mathematics and Computer Science, Jishou University, Jishou 416000, Hunan China)

Abstract: Let X be a Banach space and Y a closed convex subset of X containing the original. The following is the main result of this paper: $L_p(\ ,Y)$ is a Chebyshev subset of $L_p(\ ,X)$ ($1 < p <$ 　) if and only if $L_1(\ ,Y)$ is a Chebyshev subset of $L_1(\ ,X)$. In addition, this paper gives an example to show that the conclusion that g is a best approximation to f 　$L\ (\ ,X)$ from $L\ (\ ,Y)$ implies $g(s)$ 　$P_Y(f(s))$ for almost all s 　is not true.

Key words: best approximation; Chebyshev subset; closed convex set

(责任编辑　向阳洁)