文章编号: 1007- 2985(2005)02- 0075- 04

交换半模的局部化

曹 卫红[1], 何小飞[2]
(1. 湘西民族职业技术学院, 湖南 吉首　416000; 2. 吉首大学数学与计算机科学学院, 湖南 吉首　416000)

摘　要: 引入了局部化的定义, 讨论了该定义意义下局部化的若干性质, 并证明了交换半模局部化的泛性质.

关键词: 交换半模; 局部化; 泛性质
中图分类号: O153.5　　文献标识码: A

文献[1- 11]从不同角度讨论了半环、半模理论, 环、模的局部化研究已获得系统而深刻的结果[12- 13]. 由于半模中无减法运算, 与模的局部化研究相比, 半模的局部化研究要困难得多, 因此这方面的研究文献也甚少.

设 A 是交换半环, S 为 A 的乘法集, 在 A 与 S 的卡氏积 $A\ \ S = \{(a, s) \mid a\ \ A, s\ \ S\}$ 上定义关系　如下: $(a, s)\ \ (b, t)$　存在 $s\ \ S, r\ \ A$, 使得 $ats + r = bss + r$. 其中 $a, b\ \ A; s, t\ \ S$, 可得出　为 $A\ \ S$ 上的一个等价关系. 以 $a\ s$ 表示 $(a, s)\ \ A\ \ S$ 所在的等价类, 以 $S^{-1}A$ 表示 $A\ \ S$ 全部等价类组成的集合, 在 $S^{-1}A$ 上定义加法和乘法为 $(a\ s) + (b\ t) = (at + bs)\ (st)$, $(a\ s)(b\ t) = (ab)\ (st)$. 其中: $a, b\ \ A; s, t\ \ S$, 可证明 $S^{-1}A$ 关于上述给定的运算作成交换半环.

笔者给出交换半模的局部化的一种新定义, 证明局部化半模 $S^{-1}M$ 的加法满足消去律且具有泛性质, 并证明半模局部化是 $A-$ 半模范畴到 $S^{-1}A-$ 半模范畴的一个函子.

1　结果及证明

引入交换半模的局部化定义. 设 A 为交换半环, M 为交换 $A-$ 半模, S 为 A 的乘法集, 在 M 与 S 的卡氏积 $M\ \ S = \{(m, s) \mid m\ \ M, s\ \ S\}$ 上定义关系　如下: $(m, s)\ \ (n, t)$　存在 $s\ \ S, m\ \ M$, 使得 $mts + m = nss + m$, 其中: $m, n\ \ M; s, t\ \ S$. 有　为在 $M\ \ S$ 上的一个等价关系, 事实上易知自反性和对称性成立, 只须证明传递性, 即证.

若 $(m, s)\ \ (n, t)$ 且 $(n, t)\ \ (p, w)$, 则 $(m, s)\ \ (p, w)$, 其中 $(m, s), (n, t), (p, w)\ \ M\ \ S$. 因为 $(m, s)\ \ (n, t), (n, t)\ \ (p, w)$, 所以存在 $s_0, s_1\ \ S; m_0, m_1\ \ I$, 则 $mts_0 + m_0 = nss_0 + m_0, nws_1 + m_1 = pts_1 + m_1$. 令 $m_2 = m_0 + m_1$, 则

$$mts_0 + m_2 = nss_0 + m_2, \tag{1}$$

$$nws_1 + m_2 = pts_1 + m_2. \tag{2}$$

(1) 式乘以 ws_1, (2) 式乘以 ss_0, 令 $k = m_2ws_1 + m_2ss_0, s = ts_0s_1$, 则有 $mws + k = pss + k$. 其中 $s\ \ S$,

---

收稿日期: 2005- 01- 11
基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(03JJY6017); 湖南省教育厅科学研究项目(04C502)
作者简介: 曹卫红(1968-), 女, 湖南省桃江县人, 湘西民族职业技术学院讲师, 主要从事数学教学与研究.

k M. 由关系 的定义知(m,s) (p,w).

以m s表示(m,s) M S所在的等价类,以$S^{-1}M$表示M S全部等价类组成的集合,在$S^{-1}M$上定义加法和纯量乘法:$(m$ $s)+(n$ $t)=(mt+ns)$ (st),$(m$ $s)(a$ $t)=(ma)$ (st). 其中:m s,n t M S;a t A S. 则有如下结果.

定理1 设A为交换半环,M为交换$A-$半模,S为A的乘法集,$S^{-1}M$关于上述给定的运算作成一个交换$S^{-1}A-$半模.

证明 若m $s=m_1$ s_1,n $t=n_1$ t_1,则$(mt+ns)$ $(st)=(m_1t_1+n_1s_1)$ (s_1t_1). 因为m $s=m_1$ s_1,n $t=n_1$ t_1,所以存在s ,s S,m ,m M,满足

$$ms_1s\ +m\ =m_1ss\ +m\ , \tag{3}$$

$$nt_1s\ +m\ =n_1ts\ +m\ . \tag{4}$$

(3)式乘以tt_1s ,(4)式乘以ss_1s ,令$k=m\ tt_1s\ +m\ ss_1s$,则$(mt+ns)t_1s_1s\ s\ +k=(m_1t_1+n_1s_1)tss\ s\ +k$. 显然$s\ s$ S,k M. 所以$(mt+ns)$ $(st)=(m_1t_1+n_1s_1)$ (s_1t_1).

若m $s=m_1$ s_1,a $t=a_1$ t_1,则ma $st=m_1a_1$ s_1t_1. 因为m $s=m_1$ s_1,a $t=a_1$ t_1,所以存在s ,s S,m M,r A,则

$$ms_1s\ +m\ =m_1ss\ +m\ , \tag{5}$$

$$at_1s\ +r\ =a_1ts\ +r\ . \tag{6}$$

(5)式乘以at_1s ,(6)式乘以m_1ss ,令$k=m\ at_1s\ +m_1r\ ss$,得$mas_1t_1s\ s\ +k=m_1a_1sts\ s\ +k$. 因为$s\ s$ S,k M,所以ma $st=m_1a_1$ s_1t_1.

对任意a s,a s $S^{-1}A$;m s,m s $S^{-1}M$,则$[(a$ $s)(a$ s $)]m$ $s=(aa$ ss $)m$ $s=aa\ m$ $ss\ s=a$ $s[(a$ s $)(m$ $s)]$. 类似可得:a $s[(m$ $s)+(m$ s $)]=(a$ $s)(m$ $s)+(a$ $s)(m$ s $)$;$[(a$ $s)+(a$ s $)]m$ $s=(a$ $s)(m$ $s)+(a$ s $)(m$ $s)$;$1_{S^{-1}A}(m$ $s)=m$ s;$(a$ $s)0_{S^{-1}M}=0_{S^{-1}M}=0_S^{-1}M(a$ $s)$. 所以$S^{-1}M$关于给定的运算作成一个交换$S^{-1}A-$半模,证毕.

定义1 设A为交换半环,M为交换$A-$半模,S为A的乘法集,称上述定义的交换半模为M关于S的局部化,记作:$S^{-1}M$.

注 设A为交换半环,M为交换$A-$半模,S为A的乘法集,$S^{-1}M$为M关于S的局部化,易知$S^{-1}M$关于给定加法和纯量乘法运算$(m$ $s)+(n$ $t)=(mt+ns)$ (st),$(m$ $s)a=(m$ $s)a$ $1=(ma)$ s做成一个交换$A-$半模. 其中:m s,n t M S;a A. 定义M到$S^{-1}M$的映射f,且$f(m)=m$ 1,其中m M,则f为M到$S^{-1}M$的$A-$半模同态.

定理2 设A为交换半环,M为交换$A-$半模,S为A的乘法集,局部化半模$S^{-1}M$的加法满足消去律.

证明 假设m $s+n$ s $=m$ $s+p$ s ,其中m s,n s ,p s $S^{-1}M$,于是有

$$(ms\ +ns)\ ss\ =(ms\ +ps)\ ss\ .$$

由等价关系的定义知,存在t S,m M,使得

$$msts\ s\ +nsss\ t+m\ =msts\ s\ +psss\ t+m\ .$$

令$k=msts\ s\ +m$,则有$ns\ (sst)+k=ps\ (sst)+k$. 因为sst S,k M,所以b s $=c$ s ,证毕.

定理3 设A为交换半环,S为A的乘法集,M为交换$A-$半模,则在M ${}_AS^{-1}A$到$S^{-1}M$的$S^{-1}A-$半模满同态,当M ${}_AS^{-1}A$加法满足消去律时,M ${}_AS^{-1}A$ $S^{-1}M$.

证明 作M $S^{-1}A$到$S^{-1}M$的映射 $(m,a$ $s)=ma$ s,易验 与a s的代表元选取无关,其中:m M,a s $S^{-1}A$. 显然 为平衡映射,据文献[2]知,存在M ${}_AS^{-1}A$的加法幺半群同态 ,使 $(ma$ $s)=ma$ s. 显然 亦是$S^{-1}A-$半模满同态. 当M ${}_AS^{-1}A$的加法满足消去律时,作映射

$$:S^{-1}M\quad M\quad {}_AS^{-1}A,\quad (m\ s)=m\quad 1\ s.$$

设m $s=n$ t,则存在s S,m_0 M满足$mts\ +m_0=nss\ +m_0$. 于是$(mts\ +m_0)$ $1(s+s\ )=(nss\ +m_0)$ $1(s+s\ )$. 即m 1 $s+m_0$ $1(s+s\ )=n$ 1 $t+m_0$ $1(s+s\ )$. 于是m 1 $s=n$

$1\ t$. 不难验证　为$S^{-1}A$ － 半模同态, 且　$= 1_{S^{-1}M}$,　$= 1_{M\ _A S^{-1}M}$, 从而 $M\quad {}_A S^{-1}A\quad S^{-1}M$.

定理 4　设 A 为交换半环, M, N 为交换A － 半模, S 为A 的乘法集, 设f 为M 到N 的A － 半模同态, 对任意$m\ s\quad S^{-1}M$, 令 $S^{-1}f(m\ s) = f(m)\ s$, 则 $S^{-1}f$ 为$S^{-1}M$ 到$S^{-1}N$ 的$S^{-1}A$ 半模同态.

证明　假设$m\ s, m_1\ s_1\quad S^{-1}M$, 满足 $m\ s = m_1\ s_1$, 则存在$S\quad S, m\quad M$, 使得$ms_1 s + m = m_1 ss + m$ 成立. 于是$f(m) s_1 s + f(m) = f(m_1) ss + f(m)$, 从而$S^{-1}f(m\ s) = S^{-1}f(m_1\ s_1)$. 对任意$m\ s, n\ t\quad S^{-1}M, a\ t\quad S^{-1}A$, 由于

$$S^{-1}f[(m\ s) + (n\ t)] = S^{-1}f[(mt + ns)\ st] = f(mt + ns)\ st = [f(m)t + f(n)s]\ st = f(m)\ s + f(n)\ t = S^{-1}f(m\ s) + S^{-1}f(n\ t);$$

$$(S^{-1}f[(m\ s)(a\ t)] = S^{-1}f(ma\ st) = f(ma)\ st = f(m)\ a\ st = [f(m)\ s]\ a\ t.$$

所以 $S^{-1}f$ 为$S^{-1}M$ 到$S^{-1}N$ 的$S^{-1}A$ 半模同态.

定理 5　设 A 为交换半环, S 为A 的乘法集, M 为交换A － 半模, N 为加法可消$S^{-1}A$ － 半模, $g: M\quad N$ 是A－ 半模同态(N 关于纯量乘法$na\quad n(a/1) = n(a\ 1)$ 自然作成一个A － 半模). 令$f: M\quad S^{-1}M, f(m) = m\ 1(m\quad M)$, 则有唯一的半模同态 $h: S^{-1}M\quad N$, 使得图 1 是交换的, 即: $g = hf$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & N \\ & S^{-1}M \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd}$$

图 1　半模同态图

证明　存在性. 定义 $h: S^{-1}M\quad N, h(m\ s) = g(m)(1\ s)$, 假设 $m\ s = m\ s$, 则存在 $s_1\quad S, r_1\quad M$, 使得 $ms\ s_1 + r_1 = m\ ss_1 + r_1$, 由 g 为半模同态可得$g(ms\ s_1) + g(r_1) = g(m\ ss_1) + g(r_1)$. 因为$N$ 的加法满足消去律, 则有 $g(ms\ s_1) = g(m\ ss_1)$, 从而 $g(m)\ s\ s_1 = g(m)\ ss_1$. 两边同乘以 $1\ s\ ss_1$, 则有 $g(m)(1\ s) = g(m)(1\ s)$. 所以 h 的值确定, 对任意$m\ s\quad S^{-1}M, a\ t\quad S^{-1}A$, 有 $h[(m\ s)(a\ t)] = h(ma\ st) = g(ma)(1\ st) = g(m)(a\ 1)(1\ st) = g(m)(1\ s)(a\ t) = h(m\ s)(a\ t)$.

类似地, 同样可证 $h(m\ s + m_1\ s_1) = h(m\ s) + h(m_1\ s_1)$. 所以 h 为$S^{-1}A$－ 半模同态. 注意到 $hf(m) = h(m\ 1) = g(m)(1\ 1) = g(m)$, 则$g = hf$.

唯一性. 设$h: S^{-1}M\quad N$ 为$S^{-1}A$ 半模同态, 并且$g = hf$, 则对任意$m\quad M, h(m\ 1) = hf(m) = g(m)$. 于是对任意$m\ s\quad S^{-1}M$, 有 $h(m\ s) = h[(m\ 1)(1\ s)] = h(m\ 1)(1\ s) = g(m)(1\ s)$.

定理 6　设 A 为交换半环, M_1, M_2, M_3 为交换A － 半模, f, g 分别为M_1 到 M_2, M_2 到 M_3 的A － 半模同态, 则 $S^{-1}(g\quad f) = (s^{-1}g)\quad (s^{-1}f)$.

定理 7　设A 为交换半环, S 为 A 的乘法集, 则局部化是交换 A － 半模范畴到 $S^{-1}A$ － 半模范畴的函子.

参考文献:

[1]　陈培慈, 周媛兰. 半模的张量积 [J]. 数学学报, 2002, 45(1): 139－150.

[2]　甘爱萍, 黄福生, 陈培慈. 半模正合列 [J]. 江西师范大学学报, 2003, 27(2): 131－134.

[3]　晏瑜敏, 饶　敏. 关于半模的投射性 [J]. 宜春学院学报, 2002, 24(2): 20－21.

[4]　马　俊, 王永传. 内射半模 [J]. 山东建筑工程学院学报, 1998, 13(3): 78－81.

[5]　严质彬, 游　宏. 交换半环的局部化 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2001, 33(6): 732－735.

[6]　黄福生. 半环和 L－环 [J]. 江西师范大学学报, 1994, 18(3): 236－242.

[7]　CHEN Jia-nai. Rings and Modules [M]. Beijing: Beijing Teachers College Press, 1998.

[8]　FRANK W. Anderson Rent R, Full, Rings and Categories of Modules [M]. New York: Springer-Verlag, 1973.

[9]　GOLAN J. S. The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science [M]. Exxes, England: Longman Scientific & Technical, 1992.

[10]　WERNER KUICH, ARTI SALOMAA. Semirings Automata Languages [M]. Berlin, New york, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.

[11]　CHEN Pe-ci. Semiring Theory and Languages and Automata [M]. Nanchang: Jiangxi Gao Xiao Press, 1993.

[12]　冯克勤. 交换代数基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1986, 75－98.

[13] M.F.阿蒂亚,I.G.麦克唐纳.交换代数导引[M].北京:科学出版社,1982.

Localization of Commutative Semi-Modules

CAO Wei-hong[1], HE Xiao-fei[2]

(1. Xiangxi National Vocational Technical School, Jishou 416000, Hunan China; 2. Department of Mathematics and Computer Science, Jishou University, Jishou 416000, Hunan China)

Abstract: Localization is defined and according to the definition, some properties of localization are discussed. It is proved that the localization of a commutative semi-module satisfies the universal property.

Key words: commutative semi-modules; localization; universal property

---

(上接第74页)

参考文献:

[1] AGRAWAL P N, THAMER K J. Approximation of Unbounded Function by a New Sequence of Linear Positive Operators [J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, 225: 660-672.
[2] GUPTA V. Rate of Approximation by a New Sequence of Linear Positive Operators [J]. Computers Math. Applic., 2003, 45(12): 1 895-1 904.
[3] AGRAWAL P N, MOHAMMAD A J. On Approximation by a Linear Combination of a New Sequence of Linear Positive Operators [J]. Turk. J. Math., 2003, 27: 389-405.
[4] MICCHELLI C A. The Saturation Class and Iterates of the Bernstein Polynomial [J]. J. Approx. Theory, 1973, 8: 1-18.
[5] TIMAN A F. Theory of Approximation of Functions of a Real Variable [M]. New York: Dover Publications Inc., 1994.
[6] 谢庭藩,周颂平.实函数逼近论[M].杭州:杭州大学出版社,1997.

The Iterative Approximation of a New Sequence of Linear Positive Operators

WANG Xiao-bin

(College of Mathematics and Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, Zhejiang China)

Abstract: The iterative approximation of a new sequence of linear positive operators is studied. A Voronovskaja type asymptotic formula and an estimate on error in terms of higher-order modulus of continuity for the operators are obtained, which generalize the corresponding work of the reference.

Key words: linear positive operators; iterative approximation; higher-order modulus of continuity; approximation degree