第 26 卷　第 2 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 26　No. 2
2005 年 4 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Apr. 2005

文章编号: 1007- 2985(2005)02- 0068- 04

# $2n$ 阶非线性脉冲微分方程解的振动性

张超龙[1], 曾繁富[2]

(1. 仲恺农业技术学院基础部, 广东 广州　510225; 2. 吉首大学数学与计算机科学学院, 湖南 吉首　416000)

摘　要: 通过对高阶非线性脉冲微分方程解的振动性态分析, 得到了高阶非线性脉冲微分方程解振动的充分条件, 指出脉冲对解的性态影响.

关键词: 高阶; 脉冲; 振动; 非线性; 微分方程

中图分类号: O175.1　　文献标识码: A

文献[1- 6]对低阶脉冲微分方程解的振动性进行研究, 陈永劭等[7- 8]探讨了高阶脉冲线性微分方程的振动性, 但有关高阶非线性脉冲微分方程的振动性的研究不多. 笔者考虑高阶非线性脉冲微分方程

$$\begin{cases} x^{(2n)}(t) + f(t, x(t)) = 0 \quad t \quad t_0, t \quad t_k; \\ x^{(i)}(t_k^+) = g_{k(i)}(x^{(i)}(t_k)) \quad i = 0, 1, \quad , 2n - 1, k = 1, 2, \quad ; \\ x^{(i)}(t_0^+) = x_0^{(i)} \quad i = 0, 1, \quad , 2n - 1. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $n$ 为正整数; $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \quad < t_k < \quad$; $k = 1, 2, \quad$; $\lim\limits_{k} t_k = +\quad$; $x^{(0)}(t) = x(t)$.

以下 3 个条件在文中常常用到: ( )$f(t, x(t))$ 在$[t_0, +\quad)\quad(-\quad, +\quad)$ 上连续, $\dfrac{f(t, x)}{(x)}$ $p(t)$(其中 $x\quad 0$); 在区间$[t_0, +\quad)$ 上 $p(t)\quad 0$ 连续且不恒为 0; $x\quad(x) > 0$(其中 $x\quad 0$), $\quad(x)\quad 0$, $x\quad \mathbf{R}$. ( ) 在$(-\quad, +\quad)$ 上 $g_{k(i)}$ 连续, 且存在正常数 $a_k^{(i)}, b_k^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \quad, 2n - 1$, 满足 $a_k^{(i)}$ $\dfrac{g_{k(i)}(x)}{x}$ $\quad b_k^{(i)}$. ( )

$$(t_1 - t_0) + \frac{a_1^{(i)}}{b_1^{(i-1)}}(t_2 - t_1) + \frac{a_1^{(i)} a_2^{(i)}}{b_1^{(i-1)} b_2^{(i-1)}}(t_3 - t_2) + \quad + \frac{a_1^{(i)} a_2^{(i)} \quad a_m^{(i)}}{b_1^{(i-1)} b_2^{(i-1)} \quad b_m^{(i-1)}}(t_{m+1} - t_m) + \quad = +\quad, \tag{2}$$

记:

$$x^{(i)}(t_k) = \lim_{h\quad -0} \frac{x^{(i-1)}(t_k + h) - x^{(i-1)}(t_k)}{h}, x^{(i)}(t_k^+) = \lim_{h\quad +0} \frac{x^{(i-1)}(t_k + h) - x^{(i-1)}(t_k)}{h}.$$

其中: $i = 1, 2, \quad, 2n - 1$; $k = 1, 2, \quad$.

定义 1　函数 $x: [t_0, t_0 + \quad)\quad \mathbf{R}$. 其中 $t_0 > 0$; $\quad > 0$. 称为(1)式的解, 且满足: (1) $x^{(i)}(t_0^+) = x_0^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \quad, 2n - 1$; (2) 当 $t\quad [t_0, t_0 + \quad)$, $t\quad t_k$ 时, 则 $x(t)$ 满足 $x^{(2n)}(t) + f(t, x(t)) = 0$; (3) $x^{(i)}(t)$ 在 $t\quad [t_0, t_0 + \quad)$ 处左连续, 且满足 $x^{(i)}(t_k^+) = g_{k(i)}(x^{(i)}(t_k))$.

定义 2　(1)式的解称为非振动的解, 如果这个解最终为正或者最终为负, 否则称该解为振动的, 如果(1)式的所有解为振动的, 则称(1)式为振动的. 由于高阶非线性脉冲微分方程可化为脉冲微分方程组, 而对脉冲微分方程组的整体解存在性可参看文献[9]. 在下文中, 假定(1)式的解在$[t_0, +\quad)$ 上是存在的.

引理 1　设 $x(t)$ 为(1)式的解, 且条件( ), ( )和( )成立. 又设对某一个 $i\quad \{1, 2, \quad, 2n - 1\}$,

y　收稿日期: 2005- 02- 10
基金项目: 湖南省教育厅科研基金资助项目(03C328)
作者简介: 张超龙(1974- ), 男, 湖南省泸溪县人, 硕士, 主要从事微分方程和泛函微分研究.

存在 $T \quad t_0$, 使当 $t \quad T$ 时, $x^{(i)}(t) > 0(<0)$, $x^{(i+1)}(t) \quad 0( \quad 0)$, 则存在 $T_1 \quad T$, 使当 $t \quad T_1$ 时, 有 $x^{(i-1)}(t) > 0(<0)$.

证明　仅就括号外情形作证明(括号内情形类似可证).

情形 1: 不妨设 $T = t_0$, 当 $t \quad (t_1, t_2]$ 时, 由 $x^{(i)}(t) > 0$, $x^{(i+1)}(t) \quad 0$ 知 $x^{(i)}(t) > 0$, 且在 $t \quad (t_1, t_2]$ 上单调不减, 所以当 $t \quad (t_1, t_2]$ 时, 有 $x^{(i)}(t) \quad x^{(i)}(t_1^+)$, 积分得

$$x^{(i-1)}(t_2) \quad x^{(i-1)}(t_1^+) + x^{(i)}(t_1^+)(t_2 - t_1). \tag{3}$$

同理可得

$$x^{(i-1)}(t_3) \quad x^{(i-1)}(t_2^+) + x^{(i)}(t_2^+)(t_3 - t_2). \tag{4}$$

注意到 $x^{i}(t_2) \quad x^{(i)}(t_1^+)$, 由(3), (4) 式得

$$\begin{aligned} x^{(i-1)}(t_3) &\quad x^{(i-1)}(t_2^+) + x^{(i)}(t_2^+)(t_3 - t_2) = b_2^{(i-1)} x^{(i-1)}(t_2) + a_2^{(i)} x^{(i)}(t_2)(t_3 - t_2) \\ &\quad b_2^{(i-1)}[x^{(i-1)}(t_1^+) + x^{(i)}(t_1^+)(t_2 - t_1)] + a_2^{(i)} x^{(i)}(t_2)(t_3 - t_2) \\ &\quad b_2^{(i-1)}[x^{(i-1)}(t_1^+) + x^{(i)}(t_1^+)(t_2 - t_1) + \frac{a_2^{(i)}}{b_2^{(i-1)}} x^{(i)}(t_1^+)(t_3 - t_2)]. \end{aligned}$$

由归纳法可得

$$\begin{aligned} x^{(i-1)}(t_m) &\quad b_{(m-1)}^{(i-1)} \quad b_3^{(i-1)} b_2^{(i-1)} \{ x^{(i-1)}(t_1^+) + x^{(i)}(t_1^+)[(t_2 - t_1) + \\ &\frac{a_2^{(i)}}{b_2^{(i-1)}}(t_3 - t_2) + \quad + \frac{a_2^{(i)} a_3^{(i)} \quad a_{m-1}^{(i)}}{b_2^{(i-1)} b_3^{(i-1)} \quad b_{m-1}^{(i-1)}}(t_m - t_{m-1})]\}. \end{aligned} \tag{5}$$

因为 $a_k^{(i)} > 0$, $b_k^{(i-1)} > 0$, 由条件(　) 知: 当 $m$ 充分大时, (5) 式的右端大于零, 从而当 $m$ 充分大时, 有 $x^{(i-1)}(t_m) > 0$, 与假设矛盾. 所以对一切 $t_k > T$, 情形 1 不可能出现.

情形 2: 若存在某个 $j$, $t_j > T$ 时, 有 $x^{(i-1)}(t_j) \quad 0$, 则 $x^{(i-1)}(t_j^+) \quad a_j^{(i-1)} x^{(i-1)}(t_j) \quad 0$. 因为 $x^{(i)}(t) > 0$, 所以 $x^{(i-1)}(t)$ 在 $(t_j, t_{j+1}]$ 上单调递增, 从而当 $t \quad (t_j, t_{j+1}]$ 时, 有 $x^{(i-1)}(t) > x^{(i-1)}(t_j^+) \quad 0$, $x^{(i-1)}(t_{j+1}) > x^{(i-1)}(t_j^+) > 0$. 类似地, 当 $t \quad (t_{j+1}, t_{j+2}]$ 时, $x^{(i-1)}(t) > x^{(i-1)}(t_{j+1}^+) \quad a_{j+1}^{(i-1)} x^{(i-1)}(t_{j+1}) > 0$. 由归纳法可知: 当 $t \quad (t_{j+m-1}, t_{j+m}]$ 时, $x^{(i-1)}(t) > 0$; 当 $t \quad t_{j+1}$ 时, $x^{(i-1)}(t) > 0$.

综合情形 1, 2 可知, 存在 $T_1 \quad T$, 当 $t \quad T_1$ 时, $x^{(i-1)}(t) > 0$, 引理 1 证毕.

引理 2　设 $x(t)$ 为(1) 的解, 且条件(　), (　), (　) 成立, 又设对某一个 $i \quad \{1, 2, \quad, 2n\}$, 存在 $T \quad t_0$, 当 $t \quad T$ 时, $x(t) > 0$, $x^{(i)}(t) \quad 0$, 且 $x^{(i)}(t)$ 在任何区间 $[t, + \quad)$ 上不恒为零, 则当 $t$ 充分大时, 有 $x^{(i-1)}(t) > 0$.

证明　不妨设 $T = t_0$. 下证对一切 $t_k \quad T$, 则 $x^{(i-1)}(t_k) > 0$ 成立.

反证法. 存在某个 $t_j$, 使 $x^{(i-1)}(t_j) \quad 0$. 由 $x^{(i)}(t) \quad 0$ 知: 当 $k \quad j$ 时, $x^{(i-1)}(t)$ 在任何一个 $(t_k, t_{k+1}]$ 上单调不增, 又由条件知 $x^{(i)}(t)$ 在任一区间 $[t, + \quad)$ 上不恒为零. 故存在某个 $t_l \quad t_j$, 使 $x^{(i)}(t)$ 在 $(t_l, t_{l+1}]$ 不恒为零, 为方便起见, 不妨设 $l = j$, 即 $x^{(i)}(t)$ 在 $(t_j, t_{j+1}]$ 上不恒为零, 从而有 $x^{(i-1)}(t_{j+1}) < x^{(i-1)}(t_j^+) \quad a_j^{(i-1)} x^{(i-1)}(t_j) \quad 0$. 又当 $t \quad (t_{j+1}, t_{j+2}]$ 时, 有 $x^{(i-1)}(t) \quad x^{(i-1)}(t_{j+1}^+) \quad a_{j+1}^{(i-1)} x^{(i-1)}(t_{j+1}) < 0$, 由归纳法可得: 当 $t \quad (t_{j+m}, t_{j+m+1}]$ 时, 有 $x^{(i-1)}(t) < 0$. 故在 $(t_{j+m}, + \quad)$ 上有 $x^{(i-1)}(t) < 0$, $x^{(i)}(t) \quad 0$. 由引理 1 可得: 当 $t$ 充分大时, 有 $x^{(i-2)}(t) < 0$. 依次类推, 反复应用引理 1, 可得当 $t$ 充分大时, 有 $x(t) < 0$, 这与 $x(t) > 0(t \quad T)$ 矛盾. 故对一切的 $t_k$, 有 $x^{(i-1)}(t_k) > 0$, 再由 $x^{(i-1)}(t)$ 在 $(t_k, t_{k+1}]$ 上单调不增, 可知当 $t$ 充分大时, $x^{(i-1)}(t) > 0$. 引理 2 证毕.

引理 3　设 $x(t)$ 为(1) 式的解, 且条件(　), (　), (　) 成立, 又设存在 $T \quad t_0$, 当 $t \quad T$ 时, 有 $x(t) > 0$, 则存在 $T \quad T$ 及 $l \quad \{1, 3, \quad, 2n-1\}$, 使得当 $t \quad T$ 时, 有

$$\begin{cases} x^{(i)}(t) > 0 & i = 0, 1, \quad, l; \\ (-1)^{i-1} x^{(i)}(t) > 0 & i = l+1, \quad, 2n-1; \\ x^{(2n)}(t) \quad 0. \end{cases} \tag{6}$$

证明　不妨设 $T = t_0$. 因为 $x(t) > 0(t \quad t_0)$, 由(1) 式及 $p(t)$ 非负且在任何区间 $(t, + \quad)$ 上不恒

为零知: $x^{(2n)}(t)=-f(t,x(t))=-p(t)\varphi(x)\le 0$, 且 $x^{(2n)}(t)$ 在任何 $(t,+\infty)$ 上不恒为零. 由引理2知: $t$ 充分大时, 则 $x^{(2n-1)}(t)>0$. 为方便起见, 不妨设 $t\ge t_0$ 时, $x^{(2n-1)}(t)>0$, 从而有 $x^{(2n-2)}(t)$ 在 $(t_k,t_{k+1}]$ 上单调增加. 若对一切 $t_k$, 有 $x^{(2n-2)}(t_k)<0$, 这时显然有 $x^{(2n-2)}(t)<0\ (t\ge t_0)$. 若有某个 $t_j$, 使 $x^{(2n-2)}(t_j)\ge 0$, 则由 $x^{(2n-2)}(t)$ 的单调性及 $a_k^{(2n-2)}>0$ 知: 当 $t>t_j$ 时, 则 $x^{(2n-2)}(t)>0$. 由此知存在 $T_1\ge T$, 使下列情形之一成立: (A) $x^{(2n-1)}(t)>0$, $x^{(2n-2)}(t)>0$, $t\ge T_1$; (B) $x^{(2n-1)}(t)>0$, $x^{(2n-2)}(t)<0$, $t\ge T_1$.

当(A)成立时, 利用引理1可知当 $t$ 充分大时, 有 $x^{(2n-3)}(t)>0$. 反复利用引理1, 最终可得当 $t$ 充分大时, 有 $x^{(2n-1)}(t)>0$; $x^{(2n-2)}(t)>0$; $\cdots$; $x'(t)>0$; $x(t)>0$.

当(B)成立时, 类似前面的讨论, 利用引理2可知: 当 $t$ 充分大时, 有 $x^{(2n-3)}(t)>0$, 且进一步可推知存在 $T_2\ge T_1$, 当 $t\ge T_2$ 时, 下列情形之一成立: (C) $x^{(2n-3)}(t)>0$, $x^{(2n-4)}(t)>0$, $t\ge T_2$; (D) $x^{(2n-3)}(t)>0$, $x^{(2n-4)}(t)<0$, $t\ge T_2$. 同理可得: 存在 $T^*\ge T$ 及 $l\in\{1,3,\cdots,2n-1\}$, 使当 $t\ge T^*$ 时, 有

$$\begin{cases} x^{(i)}(t)>0 & i=0,1,\cdots,l;\\ (-1)^{i-1}x^{(i)}(t)>0 & i=l+1,l+2,\cdots,2n-1;\\ x^{(2n)}(t)\le 0. \end{cases}$$

定理1 设条件( ), ( ), ( )成立, 且 $a_k^{(0)}\ge 1$, $b_k^{(2n-1)}\le 1\ (k=1,2,\cdots)$, 如果 $\int^{+\infty}p(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$, 则(1)式的一切解振动.

证明 反证法. 若(1)式有一个非振动解 $x(t)$, 不失一般性, 可设 $x(t)>0\ (t\ge t_0)$. 由(1), (6)式知: $x^{(2n)}(t)\le 0$; $x^{(2n-1)}(t)>0$; $x'(t)>0$; $x(t)>0$. 令 $u(t)=\dfrac{x^{(2n-1)}(t)}{\varphi(x(t))}$, 则 $u(t_k^+)\ge 0\ (k=1,2,\cdots)$; $u(t)\ge 0\ (t\ge t_0)$. 又由条件( )知 $f'(x)\ge 0$, 所以当 $t\ne t_k$ 时, 则

$$u'(t)=-p(t)-\left[\frac{x^{(2n-1)}(t)x'(t)}{\varphi^2(x(t))}\right]\varphi'(x(t))\le -p(t),\tag{7}$$

$$u(t_k^+)=\frac{x^{(2n-1)}(t_k^+)}{\varphi(x(t_k^+))}\le\frac{b_k^{(2n-1)}x^{(2n-1)}(t_k)}{\varphi(a_k^{(0)}x(t_k))}\le\frac{b_k^{(2n-1)}x^{(2n-1)}(t_k)}{\varphi(x(t_k))}\le b_k^{(2n-1)}u(t_k)\le u(t_k).\tag{8}$$

对(7), (8)式从 $t_0$ 到 $t_1$ 积分得

$$u(t_1)\le u(t_0^+)-\int_{t_0}^{t_1}p(t)\,\mathrm{d}t;\ u(t_1^+)=\frac{b_1^{(2n-1)}}{a_1^{(0)}}u(t_1)\le u(t_1)\le\left[u(t_0)-\int_{t_0}^{t_1}p(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

类似地, 有

$$u(t_2)\le u(t_1^+)-\int_{t_1}^{t_2}p(t)\,\mathrm{d}t,\tag{9}$$

$$u(t_2^+)=\frac{b_2^{(2n-1)}}{a_2^{(0)}}u(t_2)\le\left[u(t_2)\le u(t_1^+)-\int_{t_1}^{t_2}p(t)\,\mathrm{d}t\right]\le\left[u(t_0)-\int_{0}^{t_1}p(t)\,\mathrm{d}t\right]-\int_{1}^{t_2}p(t)\,\mathrm{d}t=u(t_0^+)-\int_{0}^{t_2}p(t)\,\mathrm{d}t.\tag{10}$$

由数学归纳法易证, 对任何自然数 $m$ 有

$$u(t_m^+)\le\left[u(t_0^+)-\int_{0}^{t_1}p(t)\,\mathrm{d}t-\int_{1}^{t_2}p(t)\,\mathrm{d}t-\cdots-\int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}}p(t)\,\mathrm{d}t-\int_{t_{m-1}}^{t_m}p(t)\,\mathrm{d}t\right]=u(t_0^+)-\int_{0}^{t_m}p(t)\,\mathrm{d}t.\tag{11}$$

由(11)式及 $\int_{t_0}^{+\infty}p(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$ 知, 当 $m$ 充分大时, 有 $u(t_m^+)<0$, 这与已知 $u(t_m^+)\ge 0$ 矛盾. 故(1)式不存在非振动解, 即(1)式的一切解振动.

定理2 设条件( ), ( ), ( )成立, 且存在正常数 $\alpha$, $\dfrac{1}{b_k^{(2n-1)}}\ge\alpha\left(\dfrac{t_{k+1}}{t_k}\right)$ (其中 $k=1,2,\cdots$), $a_k^{(0)}\ge 1$,

如果 $\int_{t_0}^{+} t p(t) \mathrm{d}t = +$ ，则方程(1) 的一切解振动.

证明方法同定理 1 的证明.

例　考虑

$$\begin{cases} x^{(2n)}(t) + \dfrac{3}{4t^2} x = 0 \quad t \quad \dfrac{1}{2}, t \quad k, k = 1, 2, \quad ; \\ x(k^+) = \dfrac{k+1)}{k} x(k), x^{(i)}(k^+) = x^{(i)}(k) \quad i = 1, 2, \quad , 2n - 1; \\ x(\dfrac{1}{2}) = x_0, x^{(i)}(\dfrac{1}{2} = x_0^{(i)}. \end{cases} \tag{12}$$

其中: $a_k^{(0} = \dfrac{k+1}{k}$; $a_k^{(i)} = 1$; $i = 1, 2, \quad , 2n - 1$; $p(t) = \dfrac{3}{4t^2} > 0$; $t_k = k$; $t_0 = \dfrac{1}{2}$. 条件(　) 显然成立, 对于条件(　), 当 $i > 1$ 时, $a_k^{(0)} = 1$, $(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + \quad + (t_{m+1} - t_m) + \quad = \dfrac{1}{2} + 1 + + 1 + \quad = +$ ；当 $i = 1$ 时, $a_k^{(1)} = 1$, $a_k^{(0)} = \dfrac{k+1}{k}$, $(t_1 - t_0) + \dfrac{1}{2}(t_2 - t_1) + \dfrac{1}{3}(t_3 - t_2) + \quad + \dfrac{1}{m+1}(t_{m+1} - t_m) + \quad = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \quad + \dfrac{1}{m+1} + \quad = +$ . 从而条件(　) 成立. 取 $= 1$, $\dfrac{a_k^{(0)}}{a_k^{(2n-1)}} = \dfrac{k+1}{k}$ $(\dfrac{t_{k+1}}{t_k})$ , $\int_{t_0}^{+} tp(t) \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{+} t \dfrac{3}{4t^2} \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{+} \dfrac{3}{4t} \mathrm{d}t = +$ , , 所以定理 2 条件满足, (12) 式所有解振动.

参考文献:


[1] CHEN Yong-shao, FENG Wei-zhen. Oscillations of Second Order Nonlinear ODE with Impulses [J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, 210: 150- 169.

[2] BAINOV D D, EMIL MINCHEV. Oscillation of the Solutions of Impulsive Parabolic Equation [J]. J. Coput. Annl. Math., 1996, 69: 207- 214.

[3] ZHANG Yu-zhu, ZHAO Ai-min. Oscillation Criteria for Impulsive Delay Differential Equation [J]. J. Math. Annl., 1997, 205(2): 461- 470.

[4] HUANG Chun-chao. Oscillation and Nonoscillation for Second Order Liner Impulsive Differential Equation [J]. J. Math. Annl. Appl., 1997, 214: 378- 394.

[5] YAN Ju-rang, ZHAO Ai-min. Oscillation and Stability of Linear Impulsive Delay Differential Equations [J]. J. Math. Anal. Appl., 1998, 227: 187- 194.

[6] LUO Jiao-wan, LOKENATH DEBNATH. Oscillations of Second-Order Nonlinear Ordinary Differential Equations with Impulses [J]. J. Math. Anal. Appl., 1999, 240: 105- 114.

[7] 陈永劭, 冯伟侦. 高阶线性脉冲微分方程解的振动性 [J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2003, (3): 14- 19.

[8] FENG Wei-zhen. Oscillations of Fourth Order ODE with Impulses [J]. Ann. of. Diff. Eqs., 2003, 19(2): 136- 145.

[9] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D D, SIMEONOV P S. Theory of Impulsive Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific Press, 1989. 11- 20.


# Oscillations of $2n$ Order Nonlinear ODE with Impulses


ZHANG Chao-long[1], ZENG Fan-fu[2]

(1. Department of Basic Science, Zhongkai Agrotechnical College, Guangzhou 510225, China;

2. College of Mathematics and Computer science, Jishou University, Jishou, 416000, Hunan China)



**Abstract**: Oscillations of higher order nonlinear ordinary differential equation with impulses are investigated, and some sufficient conditions about oscillations of higher order nonlinear ordinary differential equations with impulses are obtained. The effect of impulse upon the oscillation of solutions is stressed.



**Key words**: higher order; impulse; oscillation; nonlinear; ordinary differential equation