文章编号: 1007-2985(2011)01-0011-03

混合单调算子不动点存在唯一性定理及其应用*

许绍元
(赣南师范学院数学与计算机科学学院, 江西 赣州 341000)

摘 要: 研究一类具有某种凹凸性的混合单调算子, 不要求紧性与连续性, 利用半序方法和单调迭代技巧, 得到了混合单调算子的若干新不动点定理, 改进了混合单调算子某些相应结果.

关键词: 锥与半序; 混合单调算子; 不动点
中图分类号: O177.91 文献标志码: A

1 相关记号

混合单调算子是一类十分重要的非线性算子, 广泛存在于非线性微分方程和积分方程的研究中, 见文献[1-7].

设 E 是实 Banach 空间, θ 是 E 的零元, P 是 E 中的锥, $\leqslant$ 是由锥 P 导出的半序, 即对任意 $x, y \in E$, $x \leqslant y$ 当且仅当 $y - x \in P$. 关于锥与半序的理论见文献[1]. 设 $D \subset E$, 若算子 $A(x, y): D \times D \to E$ 关于 x 是增的, 关于 y 是减的, 即对任意 $x_i, y_i \in D (i = 1, 2)$, $x_1 \leqslant x_2$, $y_2 \leqslant y_1$, 蕴涵 $A(x_1, y_1) \leqslant A(x_2, y_2)$, 则称 A 为混合单调的[2]. 若存在 $x \in D$, 使 $A(x, x) = x$, 则称 x 为 A 在 D 中的不动点. 设 $e > \theta$, 记 $P_e = \{x \in E \mid \exists \lambda, \mu > 0$, 使得 $\lambda e \leqslant x \leqslant \mu e\}$.

2 主要结果

定理 1 设 P 是实 Banach 空间 E 中的正规锥, $A: P_e \times P_e \to P_e$ 是混合单调算子. 若对任意 $x \in P_e$, 存在函数 $\phi: (0, 1) \to (0, 1]$ 使得对 $\forall t \in (0, 1)$, $x \in P_e$, 有:

(i) $t < \phi(t)^2$;

(ii) $A(tx, t^{-1}x) \geqslant \phi(t) A(x, x)$, $A(t^{-1}x, tx) \leqslant [\phi(x)]^{-1} A(x, x)$;

(iii) $\phi = \phi(t)$ 在关于 $t \in (0, 1)$ 左下半连续并且满足 $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{t^{\frac{1}{2}}}{\phi(t^{\frac{1}{2}})} = 0$.

那么算子 A 在 P_e 中有唯一不动点 x^*, 且对 $\forall x_0, y_0 \in P_e$, 序列 $x_n = A(x_{n-1}, y_{n-1})$, $y_n = A(y_{n-1}, x_{n-1})$, 都有 $x_n \to x^*$, $y_n \to x^*$ $(n \to \infty)$.

证明 先证不动点存在性与迭代收敛性. 由(ii) 有 $A(t^{-1}x, tx) \leqslant \dfrac{1}{\phi(t)} A(x, x)$. 令 $z_0 = e \in P_e$, 则 $A(z_0, z_0) \in P_e$. 显然, 对 $\forall x_0, y_0 \in P_e$, 存在充分小的实数 $r_0 (0 < r_0 < 1)$ 使得 $r_0^{\frac{1}{2}} z_0 \leqslant x_0 \leqslant r_0^{-\frac{1}{2}} z_0$, $r_0^{\frac{1}{2}} z_0 \leqslant y_0 \leqslant r_0^{-\frac{1}{2}} z_0$, 并且

$$\frac{r_0^{\frac{1}{2}}}{\phi(r_0^{\frac{1}{2}})} z_0 \leqslant A(z_0, z_0) \leqslant \frac{\phi(r_0^{\frac{1}{2}})}{r_0^{\frac{1}{2}}} z_0.$$

令 $u_0 = r_0^{\frac{1}{2}} z_0$, $v_0 = r_0^{-\frac{1}{2}} z_0$, $u_n = A(u_{n-1}, v_{n-1})$, $v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1})$, 则 $u_0, v_0 \in P_e$, $u_0 \ll v_0$, $u_0 = r_0 v_0$, 且

$$u_1 = A(r_0^{\frac{1}{2}} z_0, r_0^{-\frac{1}{2}} z_0) \geqslant \phi(r_0^{\frac{1}{2}}) A(z_0, z_0) \geqslant r_0^{\frac{1}{2}} z_0 = u_0,$$

$$v_1 = A(r_0^{-\frac{1}{2}} z_0, r_0^{\frac{1}{2}} z_0) \leqslant \frac{1}{\phi(r_0^{\frac{1}{2}})} A(z_0, z_0) \leqslant r_0^{-\frac{1}{2}} z_0 = v_0.$$

于是, 根据 A 的混合单调性, 由归纳法有

* 收稿日期: 2010-09-12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10961003)
作者简介: 许绍元(1964-), 男, 湖北武汉人, 赣南师范学院数学与计算机科学学院教授, 博士后, 主要从事非线性泛函分析与分形几何研究.

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0,$$
$$u_n \leqslant x_n \leqslant v_n, u_n \leqslant y_n \leqslant v_n. \tag{1}$$

根据(ii)和A的混合单调性有

$$u_1 = A(u_0, v_0) \geqslant A(r_0 v_0, r_0^{-1} v_0) \geqslant \phi(r_0) A(v_0, v_0),$$
$$v_1 = A(v_0, u_0) \leqslant A(r_0^{-1} v_0, r_0 v_0) \leqslant \frac{1}{\phi(r_0)} A(v_0, v_0).$$

于是有$u_1 \geqslant r_1 v_1$,其中$r_1 = \phi(r_0)^2 > r_0$, $0 < r_1 \leqslant 1$. 由归纳法知$u_n \geqslant r_n v_n$, $n = 1, 2, \cdots$,其中

$$r_n = \phi(r_{n-1})^2 > r_{n-1} \quad 0 < r_n \leqslant 1. \tag{2}$$

显然$\{r_n\}$收敛,设$\lim\limits_{n \to \infty} r_n = r \in (0, 1]$,则$r_n \leqslant r = 1$. 事实上若$0 < r < 1$,由(iii)和(2)有$r = \phi(r)^2 > r$,矛盾. 故$r = 1$. 于是对$\forall n, p \geqslant 1$,有

$$\theta \leqslant v_n - u_n \leqslant v_n - r_n v_n = (1 - r_n) v_n \leqslant (1 - r_n) v_0,$$
$$\theta \leqslant u_{n+p} - u_n \leqslant v_n - u_n, \theta \leqslant v_n - v_{n+p} \leqslant v_n - u_n.$$

由P的正规性易见$v_n - u_n \to 0 (n \to \infty)$,故$\{u_n\}$, $\{v_n\}$是E中的Cauchy列,因此$\exists u^*, v^* \in E$使$u_n \to u^*$, $v_n \to v^* (n \to \infty)$且$u^* = v^*$. 记$x^* = u^* = v^*$.

下证x^*是A在P_e中的不动点. 在(1)式中令$n \to \infty$时得$x_n \to x^*$, $y_n \to x^* (n \to \infty)$,且$u_n \leqslant x^* \leqslant v_n (n = 1, 2, \cdots)$. 下证$A(x^*, x^*) = x^*$. 一方面,$A(x^*, x^*) \geqslant A(u_n, v_n) \to u_{n+1} \to x^*$,从而$A(x^*, x^*) \geqslant x^*$;另一方面,$A(x^*, x^*) \leqslant A(v_n, u_n) \to v_{n+1} \to x^*$,从而$A(x^*, x^*) \leqslant x^*$: 故$A(x^*, x^*) = x^*$,即$A$在$P_e$中有不动点$x^*$.

再证不动点唯一性. 若存在$(x, y) \in P_e \times P_e$,使$A(x, y) = x$,令

$$t_1 = \sup\{t \mid 0 < t < 1, tx^* \leqslant x \leqslant t^{-1} x^*, tx^* \leqslant y \leqslant t^{-1} x^*\}, \tag{3}$$

则$0 < t_1 \leqslant 1$,且$t_1 x^* \leqslant x \leqslant t_1^{-1} x^*$, $t_1 x^* \leqslant y \leqslant t_1^{-1} x^*$. 下证$t_1 = 1$. 否则,若$0 < t_1 < 1$,于是由(i)(ii)有

$$x = A(x, y) \geqslant A(t_1 x^*, t_1^{-1} x^*) \geqslant \phi(t_1) A(x^*, x^*) = \phi(t_1) x^*,$$
$$x = A(x, y) \leqslant A(t_1^{-1} x^*, t_1 x^*) \leqslant \frac{1}{\phi(t_1)} A(x^*, x^*) = \frac{1}{\phi(t_1)} x^*.$$

因此$\phi(t_1) x^* \leqslant x \leqslant \frac{1}{\phi(t_1)} x^*$. 同理,$\phi(t_1) x^* \leqslant y \leqslant \frac{1}{\phi(t_1)} x^*$. 于是由(3)式有$\phi(t_1)^2 \leqslant \phi(t_1) \leqslant t_1$,这与$t_1 < \phi(t_1)^2$矛盾. 故$t_1 = 1$. 从而$x = y = x^*$.

设z是A在A_e中的任一不动点. 因为$(z, z) \in P_e \times P_e$是$A$在$A_e$中的耦合不动点,所以由以上讨论可知$z = x^*$.

最后证明迭代收敛性. 对$\forall x_0, y_0 \in P_e$,有$u_0 \leqslant x_0 \leqslant v_0$, $u_0 \leqslant y_0 \leqslant v_0$. 由归纳法,$u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$, $u_n \leqslant y_n \leqslant v_n$. 令$n \to \infty$时得$x_n \to x^*$, $y_n \to x^* (n \to \infty)$, $x = x^*$. 证毕.

命题 1 设$A: P_e \times P_e \to P_e$是$\phi$凹$-(-\psi)$凸混合单调算子算子,其中$\phi(t, x) = \psi(t, x) = t^\alpha (0 < \alpha < 1)$,则$A: P_e \times P_e \to P_e$满足条件: 对$\forall t \in (0, 1)$, $x \in P_e$,有

$$A(tx, t^{-1} x) \geqslant t^{2\alpha} A(x, x), A(t^{-1} x, tx) \leqslant t^{-2\alpha} A(x, x).$$

推论 1 设P是实Banach空间E的正规体锥,$A: \mathring{P} \times \mathring{P} \to \mathring{P}$是混合单调算子满足: 对给定的$y$, $A(\cdot, y): \mathring{P} \to \mathring{P}$是$\alpha-$凹算子;对给定的$x$, $A(x, \cdot): \mathring{P} \to \mathring{P}$是$(-\alpha)-$凸算子,其中$0 \leqslant \alpha < \frac{1}{4}$. 那么$A$在$P_e$中有唯一不动点$x^*$,且对$\forall x_0, y_0 \in P_e$,序列$x_n = A(x_{n-1}, y_{n-1})$, $y_n = A(y_{n-1}, x_{n-1})$都有$x_n \to x^*$, $y_n \to x^* (n \to \infty)$.

证明 由题设和命题 1 有

$$A(tx, t^{-1} x) \geqslant t^{2\alpha} A(x, x) A(t^{-1} x, tx) \leqslant t^{-2\alpha} A(x, x).$$

令$\phi(t) = t^{2\alpha}$,则$\phi(t^{\frac{1}{2}}) = t^\alpha$,于是

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\phi(t^{\frac{1}{2}})} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{t^\alpha} = \lim_{t \to 0^+} t^{\frac{1}{2} - \alpha} = 0.$$

显然,对$\forall t \in (0, 1)$有$t < \phi(t)^2$. 故由定理 1 即知推论 1 结论成立.

注 1 当$0 \leqslant \alpha < \frac{1}{4}$时,推论 1 去掉了文献[3]中定理 3.1 上下解条件“$\exists u_0, v_0 \in \mathring{P}$, $u_0 \leqslant v_0$使得$u_0 \leqslant A(u_0, v_0)$, $A(v_0, u_0) \leqslant v_0$”以及条件“$A(\theta, v_0) \geqslant \varepsilon A(v_0, u_0)$”,因此推论 1 改进了文献[3]定理 3.1 的结果.

3 例子

下面利用文中的主要结果研究一类无界域上的非线性积方程.

考虑下列非线性积分方程:

$$x(t)=(Ax)(t)=\int_{\mathbf{R}^N}K(t,s)(x^{\frac{1}{5}}(s)+x^{-\frac{1}{5}}(s))\mathrm{d}s. \tag{4}$$

结论 1 若 $K:\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^1$ 为非负连续函数, 则方程(4) 有唯一正解 $x^*(t)$ 且迭代序列

$$x_n(t)=\int_{\mathbf{R}^N}K(t,s)(x_{n-1}^{\frac{1}{5}}(s)+y_{n-1}^{-\frac{1}{5}}(s))\mathrm{d}s,$$

$$y_n(t)=\int_{\mathbf{R}^N}K(t,s)(y_{n-1}^{\frac{1}{5}}(s)+x_{n-1}^{-\frac{1}{5}}(s))\mathrm{d}s \qquad n=1,2,\cdots$$

满足 $\sup\limits_{t\in\mathbf{R}^N}|x_n(t)-x^*(t)|\to 0$, $\sup\limits_{t\in\mathbf{R}^N}|y_n(t)-x^*(t)|\to 0(n\to\infty)$.

证明 利用推论 1 证明结论 1. 令 $E=C_B(\mathbf{R}^N)$ 为 $\mathbf{R}^N$ 上有界连续函数的全体. 定义 $\|x\|=\sup\limits_{t\in\mathbf{R}^N}|x(t)|$, 则 E 为实 Banach 空间. 令 $P=C_B^+(\mathbf{R}^N)$ 为 $\mathbf{R}^N$ 上非负有界连续函数的全体, 则 P 是 E 中的正规体锥. 显然(4) 式等价于 $x=A(x,x)$, 其中

$$A(x,y)=A_1(x)+A_2(y), A_1(x)=\int_{\mathbf{R}^N}K(t,s)x^{\frac{1}{5}}(s)\mathrm{d}s, A_2(y)=\int_{\mathbf{R}^N}K(t,s)y^{-\frac{1}{5}}(s)\mathrm{d}s.$$

令 $\alpha=\frac{1}{5}$, 不难看出算子 A 满足推论 1 的所有条件, 故结论 1 成立.

注 2 文献[3] 中定理 3.1 的方法依赖于上下解, 从而不能得到结论 1. 故文中有关结果是文献[3] 的有益补充.

参考文献:

[1] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear Problems in Abstract Cones [M]. Boston and New York: Academic Press. Inc., 1988.

[2] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM V. Coupled Fixed Points of Nonlinear Operators with Applications [J]. Nonlinear Analysis, TMA., 1987, 11(5): 623-637.

[3] 吴焱生, 李国祯. 混合单调算子不动点存在唯一性定理及其应用 [J]. 数学学报, 2003, 46(1): 161-166.

[4] 许绍元, 曾超益, 朱传喜. φ 凹-(-ψ) 凸混合单调算子不动点存在惟一性及其应用 [J]. 数学学报, 2005, 48(6): 1 055-1 064.

[5] 张庆政. 一类非紧算子与不动点的存在唯一性 [J]. 数学研究与评论, 1999, 19(3): 617-620.

[6] 赵增勤. 半序线性空间混合单调映射不动点存在唯一性 [J]. 系统科学与数学, 1994, 19(2): 217-224.

[7] 张志涛. 混合单调算子的不动点定理及其应用 [J]. 数学学报, 1998, 41(6): 1 121-1 126.

Theorems of Existence and Uniqueness of Fixed Point of Mixed Monotone Operators and Applications

XU Shao-yuan

(School of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou 341000, Jiangxi China)

Abstract A class of concave convex mixed monotone operators are discussed. Without any continuity and compactness, some new existence and uniqueness theorems of fixed points of mixed monotone operators are obtained by means of semi-order method. In consequence, some corresponding results are improved.

Key words: cone and semi-order; mixed monotone operator; fixed point