文章编号:1007-2985(2012)03-0001-03

拓扑空间中几类紧性的非标准刻画*

陈东立,鲁 莉
(西安建筑科技大学理学院,陕西 西安 710055)

摘 要:利用非标准分析理论,对拓扑中的紧性、相对紧、局部紧性进行非标准刻画,简化原有证明,使它们的本质性质更为清晰,使拓扑学在理论上更加深刻.

关键词:拓扑;单子;紧性;非标准
中图分类号:O141.41 **文献标志码**:A **DOI**:10.3969/j.issn.1007-2985.2012.03.001

利用非标准分析理论[1],对拓扑中的紧性、相对紧、局部紧性作了非标准刻画,拓宽非标准分析的研究领域,以提高对非标准分析这一门新兴学科的认识,使非标准分析理论更丰富.这既有助于非标准分析理论在其他应用领域的发展,又给拓扑学赋予了更内在的探索意义.

1 预备知识

定义 1[2-3] 设 X 是一个集合,对 $\forall x \in X$,$\mu(x)$ 为点 x 的单子.定义集合 X 上的拓扑为 $T=\{A \subseteq X$:对任意的 $x \in A$,$\mu(x) \subseteq {}^*A\} \cup \{\varnothing\}$.

定义 2 设 A 是(X,T)的子集,若对 $\forall x \in X$,$\mu(x) \cap {}^*A \neq \varnothing$,都有 $x \in A$,则称集合 A 是闭集.

定义 3 设(X,T)是拓扑空间,若对 $\forall x,y \in X$,$x \neq y$,有 $\mu(x) \cap \mu(y)=\varnothing$,则称 T 是 Hausdorff 的.

定义 4 设(X,T)是拓扑空间,若对任意的闭集 $A \subseteq X$ 及 $x \notin A$,有 $\mu(x) \cap \mu(A)=\varnothing$,则称 T 是正则的.

定义 5 设(X,T)是拓扑空间,若对任意的闭集 $A,B \subseteq X$,有 $\mu(A) \cap \mu(B)=\varnothing$,则称 T 是正规的.

2 紧性的刻画及其相关理论

定义 6 设 A 是 X 子集,若对 $\forall y \in {}^*A$,$\exists x \in A$,使得 $y \in \mu(x)$,则称 A 是 X 的紧子集.

定理 1[4] 设(X,T)是拓扑空间,则 A 是 X 的紧子集,当且仅当 A 的任意开覆盖有有限子覆盖.

定理 2 设 A 是拓扑空间(X,T)的子集,若 A 是紧的,则对所有的 $a \in {}^*A$ 有 $A \cap st_t(a) \neq \varnothing$.

证明 因为 A 是紧的,所以对 $\forall a \in {}^*A$,$\exists x \in A$,使得 $a \in \mu_t(x)$,而 $st_t(a)=\{x \in A \mid a \in \mu_t(x)\}$,显然 $x \in \mu_t(a)$,从而 $A \cap st_t(a) \neq \varnothing$.

定理 3 设 A 是拓扑空间(X,T)的子集,若对所有的 $a \in {}^*A$ 有 $A \cap st_t(a) \neq \varnothing$,则 $\mu_t(A)=\bigcup\{\mu_t(x):x \in A\}$.

证明 对 $\forall a \in {}^*A$ 有 $A \cap st_t(a) \neq \varnothing$,一定存在 $x \in A \cap st_t(a)$,使 $a \in \mu_t(x)$,所以有 $\mu_t(a) \in \mu_t(x)$,则 $\bigcup\{\mu_t(a):a \in {}^*A\} \subseteq \bigcup\{\mu_t(x):x \in A\}$.又 $\mu_t(A)=\bigcup\{\mu_t(a):a \in A\}$,所以 $\mu_t(A)$

* **收稿日期**:2012-03-13
作者简介:陈东立(1963-),男,陕西临潼人,西安建筑科技大学理学院教授,主要从事非标准分析研究.

$=\bigcup\ \{\mu_t(x):x\in A\}$.

定理 4　若拓扑空间(X,T)是紧的,且A是X的闭子集,则A是紧的.

引理 1　拓扑空间(X,T)是T_2的,A为X的紧子集,若$x\in X-A$,则$\mu(x)\cap {}^*A=\varnothing$.

证明　假设$\mu(x)\cap {}^*A\neq\varnothing$,则存在$z$使$z\in\mu(x)\cap {}^*A$,$z\in {}^*A$,存在$c\in A$使$z\in\mu(c)$,因为$X$是$T_2$的,$x\in X-A$,而$c\in A$,所以$\mu(x)\cap\mu(c)=\varnothing$,这与$z\in\mu(x)\cap\mu(c)$矛盾.因此,$\mu(x)\cap {}^*A=\varnothing$.

定理 5[5]　T_2空间的每个紧子集都是闭的.

定理 6　紧的T_2空间是正则的.

证明　A为X的紧子集,由定理5知,A为闭的.因为拓扑空间(X,T)是T_2的,对$\forall x\in A$,$y\notin A$,有$\mu(x)\cap\mu(y)=\varnothing$,又由$A$是闭的,故$A$是紧的,从而$\mu_t(A)=\bigcup\ \{\mu_t(x):x\in A\}$,所以$\mu_t(A)\cap\mu_t(x)=\varnothing$.因此,紧的$T_2$空间是正则的.

定理 7　紧的T_2空间是正规的.

证明　A,B为X的紧子集,由定理5知,A,B为闭的.因为拓扑空间(X,T)是T_2的,对$\forall x\in A$,$y\in B$,有$\mu(x)\cap\mu(y)=\varnothing$,又由$A$,$B$是闭的,故$A$,$B$是紧的,从而$\mu_t(A)=\bigcup\ \{\mu_t(x):x\in A\}$,$\mu_t(B)=\bigcup\ \{\mu_t(x):x\in B\}$,所以$\mu_t(A)\cap\mu_t(B)=\varnothing$.因此,紧的$T_2$空间是正规的.

设f将拓扑空间X映入Y,且X,$Y\in U$,

$$X=\prod_{i\in J}X_i=\{f\mid f(i)\in X_i,\text{对每一个 } i\in J\}.$$

引理 2　设$X=\prod_{i\in J}X_i$,$g\in {}^*X$且$f\in X$,则$g\in\mu(f)$,当且仅当对每一个$i\in J$有$g(i)\in\mu(f(i))$.

定理 8　若对每一个$i\in J$,X_i是紧的,则$\prod_{i\in J}X_i$也是紧的.

证明　设$X=\prod_{i\in J}X_i=\{f\mid f(i)\in X_i,\text{对每一个 } i\in J\}$,且$h\in {}^*X$,由转换原理知$h(i)\in {}^*X_i$,由$X_i$是紧的,故一定存在一个$a_i\in X_i$,有$h(i)\in\mu(a_i)$.对于映射$f$,令$f(i)=a_i$,则$h(i)\in\mu(f(i))$,$h\in\mu(f)$.

3　相对紧的刻画及其相关理论

定义 7　设(X,T)是拓扑空间,A是X的子集,若$\bar{A}$是紧的,则称A是相对紧的.即A是相对紧的当且仅当对$\forall y\in {}^*\bar{A}$,$\exists x\in\bar{A}$,使得$y\in\mu(x)$.

定义 8　点x属于集合$A\subseteq X$的闭包,当且仅当存在$p\in {}^*A$,使得$p\in\mu(x)$.

定理 9　若$\bar{A}\subseteq K$,K是紧的,则A是相对紧的.

证明　对$\forall x\in\bar{A}\subseteq K$,$\exists y\in {}^*\bar{A}\subseteq {}^*K$,使得$y\in\mu(x)$,由$K$是紧的,故对上述$\forall y\in {}^*\bar{A}\subseteq {}^*K$,$\exists z\in\bar{A}\in K$,使得$y\in\mu(z)$,所以$\bar{A}$是紧的,$A$是相对紧的.

定理 10　A是相对紧的当且仅当${}^*A\subseteq ns_t({}^*X)$.

证明　由A是相对紧的,故$\bar{A}$是紧的,对$\forall y\in {}^*A\subseteq {}^*\bar{A}$,存在$x\in\bar{A}$,使$y\in\mu(x)$,$y\in ns_t({}^*X)$,所以${}^*A\subseteq ns_t({}^*X)$.

定义 9　x是集合A的聚点,当且仅当存在$p\in {}^*A-\{x\}$,使得$p\in\mu(x)$.

定理 11　正则空间中紧集的闭包是紧集.

证明　即需证明在正则空间中,A是紧的,则A是相对紧的.$\bar{A}=A\cup d(A)$,若$x\in A\in\bar{A}$,则由A是紧的,故对$\forall y\in {}^*A\subseteq {}^*\bar{A}$,$\exists x\in A\subseteq\bar{A}$,使得$y\in\mu(x)$;若$x\in d(A)\in\bar{A}$,则存在$p\in {}^*A-\{x\}$,使得$p\in\mu(x)$.所以,$\bar{A}$是紧的.

定理 12　若对每一个 $i \in J$，X_i 是相对紧的，则 $\prod_{i \in J} X_i$ 也是相对紧的.

证明　即需证明若对每一个 $i \in J$，$\bar{X}_i$ 是相对紧的，则 $\prod_{i \in J} \bar{X}_i$ 也是相对紧的. 设 $X = \prod_{i \in J} \bar{X}_i$，且 $h \in {}^*X$，由转换原理知 $h(i) \in {}^*\bar{X}_i$，由 $\bar{X}_i$ 是紧的，故一定存在一个 $a_i \in \bar{X}_i$，有 $h(i) \in \mu(a_i)$. 对于映射 f，令 $f(i) = a_i$，则 $h(i) \in \mu(f(i))$，$h \in \mu(f)$.

4　局部紧的刻画及其相关理论

定义 10　拓扑空间为局部紧当且仅当它的每一点至少有 1 个紧邻域.

定义 11　若对某紧集 K，有 $A \subseteq K$，则称 $A \subseteq G$ 是有界的.

设 B 是 G 的所有有界子集族.

定义 12　$q \in X$，$O_q = \{G \in T \mid p \in G\}$ 为 q 的开邻域系.

定理 13　若 $B \cap O_q \neq \varnothing$，则称 G 是局部紧的.

证明　因为 $B \cap O_q \neq \varnothing$，所以设 $E \in B \cap O_q$，即 $e \in E$，且 E 为开集. $E \in B$，E 为有界的，则 $\exists K$ 是紧的，使 $E \subseteq K$，使对 $\forall y \in {}^*E \subseteq {}^*K$，$\exists x \in K$，使 $y \in \mu(x)$. E 为开集，$x \in E$，则 E 是紧的，即对每一个点 q 有一个紧邻域 E.

定理 14　设 (X, T) 是拓扑空间，若 X 是紧的，则它是局部紧的.

定义 13　设 (X, T) 是拓扑空间，由 X 的紧子集的补集生成的虑子称为 X 的紧 Frechet 虑子，记作 $F_c(x)$.

命题 1　对 $\forall X$ 的紧子集 C，F_c 的单子满足 $\mu(F_c) \cap {}^*C = \varnothing$.

定义 14　若 X 的紧子集 C 使得 $a \in {}^*C$，则称近标准点 $a \in ns_t({}^*X)$ 是紧的.

定理 15　一个拓扑空间是局部紧的，当且仅当每个近标准点是紧的.

证明　充分性. 若 a 是近标准点，则 $a \in ns_t({}^*X)$，对 $\forall x \in st_t(a)$，有 $a \in \mu_t(x)$，因为 X 是局部紧的，则至少有 1 个紧邻域 $V \subseteq X$ 使得 $a \in \mu_t(x) \subset {}^*V$ 是近标准的.

必要性. 设每一个近标准点是紧的，则 $\mu(F_c) \cap ns_t({}^*x) = \varnothing$，对任意的标准点 x，$\mu(F_c) \cap \mu_t(x) = \varnothing$，因此对任意的 $x \in X$ 存在邻域 V，$E \subseteq F_c$，使得 $V \cap E = \varnothing$，$X - E$ 是 x 的一个紧邻域.

参考文献：

[1]　ROBINSON A. Nontastandard Analysis [M]. Amsterdam: North-Holland, 1963.

[2]　DAVISM. Applied Nonstandard Analysis [M]. New York: Wiley, 1977.

[3]　LUXEBURG W A J. A General Theory of Monads, Applications of Model Theory to Algebra and Porbability [M]. New York: Holt Rineliart and Winston, 1969: 18 - 86.

[4]　陈东立. 拓扑的非标准定义 [J]. 西安建筑科技大学学报，2006，36(3)：348 - 350.

[5]　翟美娟. 紧性的非标准定义及其性质 [J]. 纺织高校基础科学学报，2009，22(3)：276 - 278.

Non-Standard Description of Several Classes of Compactness in Topological Space

CHEN Dong-li, LU Li

(School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: This article uses the nonstandard analysis theory to describe the compactness, relative compactness, and locall compactness in typological space. The original proof is simplified, making the essential characteristics more clear, and topology theoretically more profound.

Key words: topology; list; compactness; non-standard

（责任编辑　向阳洁）