文章编号:1007－2985(2012)01－0021－02

几乎周期点稠密系统的拓扑遍历性*

李　楠[1],董明会[2],王鑫淼[2]

(1.吉林师范大学博达学院,吉林 四平　136000;2.本溪市第三高级中学,吉林 本溪　117000)

摘　要:在极小映射的基础上构造了几乎周期点稠密系统,并运用拓扑传递性与稠密性研究了几乎周期点稠密系统与Li-Yorke 混沌的关系,证明了几乎周期点稠密系统在一定条件下是拓扑遍历的.这样,建立起了几乎周期点稠密系统与拓扑遍历性的联系,对进一步了解几乎周期点稠密系统测度中心的性质有一定的启示作用.

关键词:几乎周期点;传递;拓扑遍历性

中图分类号:O189.1　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.3969/j.issn.1007－2985.2012.01.006

1　预备知识

文中 X 总表示为以 d 为度量的紧致度量空间.

一个紧系统的全部重要的动力性态都集中在它的测度中心上,因此只需研究极小系统,因为极小系统本身就是该系统的测度中心.而极小系统满足一些条件时,就成为几乎周期点稠密系统,对此系统进行研究,不仅能加深对整个系统的理解,还会有助于完善已有的结论.

定义 1[1]　称 x 是几乎周期点的,如果对任意 $\varepsilon>0$,存在整数 $N>0$,使得对任何 $q\geqslant 0$,存在整数 r,$q<r\leqslant q+N$ 满足 $d(f^r(x),x)<\varepsilon$.f 的全体几乎周期点的集合记作 $A(f)$.

定义 2[2]　称 $M\subset X$ 为(相对于 f 的)极小集,若 M 是 f 的非空不变闭集且 M 中不存在 f 的非空不变的真子集.若 X 本身是极小的,则称 f 为极小映射.

定义 3[3]　称 f 为(拓扑)传递的,若对 X 的任何非空开集 U,V,存在 $n>0$,使得 $f^n(U)\cap V\neq\varnothing$.称轨道在 X 中稠密的点为 f 的传递点.

定义 4[4]　设 U,V 为 X 的任意 2 个非空开子集,若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{n}[\#(K(U,V)\cap\{0,1,\cdots,n-1\})]>0$,即 $K(U,V)$ 为具有正上密度的正整数集的子集,则称 f 是拓扑遍历的.

2　相关引理

引理 1[5]　设 M 是 X 的非空闭子集且 $f(M)\subset M$,则 M 极小当且仅当对任何 $x\in M$,$\overline{\mathrm{orb}(x)}=M$.

证明　必要性.设 M 是极小,则 $f(M)\subset M$,故 $\overline{\mathrm{orb}(x)}=M$.又有 M 是闭集,所以 $\overline{\mathrm{orb}(x)}=M$.若 $\overline{\mathrm{orb}(x)}\neq M$,则 $\overline{\mathrm{orb}(x)}$ 是含在 M 中的 f 的非空闭的不变真子集,与 M 极小矛盾.因此 $\overline{\mathrm{orb}(x)}=M$.

充分性.若 M 不是极小的,则存在 M 的非空闭的不变真子集 E 使 $f(E)\subset E$.任取 $x\in E$,有 $\overline{\mathrm{orb}(x)}\subset E$,故 $\overline{\mathrm{orb}(x)}\neq M$.

引理 2[6]　$x\in A(f)$ 当且仅当 $x\in\omega(x,f)$ 且 $x\in\omega(x,f)$ 是极小的.

引理 3　下述条件等价:(ⅰ)f 是极小的;(ⅱ)若 $\omega(x,f)\subset X$ 是闭的,且对 f 不变,则 $\omega(x,f)=X$ 或 $\omega(x,f)=\varnothing$.

证明　(ⅰ)⇒(ⅱ).设 $\omega(x,f)\subset X$ 是闭的,且对 f 不变.又设 $x\in\omega(x,f)$.据定义 2,$X=\overline{\mathrm{orb}(x)}\subset\omega(x,f)$,因此 $X=\omega(x,f)$.

* **收稿日期**:2011－11－05

作者简介:李　楠(1996－),男,吉林公主岭人,吉林师范大学博达学院辅导员,硕士研究生,主要从事动力系统研究.

(ⅱ)⇒(ⅰ).设 $x\in X$,显然$\overline{\mathrm{orb}(x)}$是 X 对 f 不变的非空闭子集,$X=\overline{\mathrm{orb}(x)}$,$f$ 是极小的.

注 1 这个引理充分说明极小集中不存在周期点.

引理 4[7] 若 X 紧致,则 f 传递当且仅当存在 $x\in X$ 使得 $\omega(x,f)=X$.

证明 假设存在 $x\in X$ 使 $\omega(x,f)=X$,并设 U,V 为 X 中的任意非空开集,则存在 $n>m>0$ 使 $f^m(x)\in U$,$f^n(x)\in V$,故 $f^{n-m}(U)\cap V\neq\varnothing$,于是 f 传递.

下设 f 传递.对每个 $n>0$,存在半径为 $1/n$ 的有限多开球覆盖 X.当 n 取遍正整数,所得这些开球可写成序列 $U_1,U_2,\cdots$.对每个正整数 k,集合 $G_k=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}f^{-n}(U_k)$ 都是 X 中的稠密开集.因 X 完备,故由 Bairc 纲定理[3],存在 $x\in\bigcap_k G_k$.由于 x 得轨道穿过每个 U_k,因此 $\mathrm{orb}(x,f)$ 在 X 中稠密.注意到 f 传递蕴涵 $f(X)=X$,可知存在 $y\in X$ 使 $f(y)=x$.若 $y\in\mathrm{orb}(x,f)$,则 x 是周期点且 $\omega(x,f)=X$.否则 $y\in\omega(x,f)$,这蕴涵 $x\in\omega(x,f)$,于是 $\omega(x,f)\supset\mathrm{orb}(x,f)$.进而 $\omega(x,f)\supset\overline{\mathrm{orb}(x,f)}=X$,这是因为 $\omega(x,f)$ 是闭集.从而也有 $\omega(x,f)=X$.

根据以上几个引理显然可以得到以下几个推论:

推论 1 若 $x\in A(f)$ 且 $\overline{A(f)}=X$,则 $x\in\omega(x,f)$ 极小且 $\omega(x,f)=X$.

推论 2 若 $x\in A(f)$ 且 $\overline{A(f)}=X$,则 X 是极小集,f 为极小映射.

推论 3 若 $x\in A(f)$ 且 $\overline{A(f)}=X$,则 f 是传递的.

3 主要结果及证明

定理 1 设(X,f)为紧致系统,若 $x\in A(f)$ 且 $\overline{A(f)}=X$,则 f 是拓扑遍历的.

证明 由推论 3 可知 f 是传递的,设 U,V 是 2 个非空开子集,于是 $\exists n>0$,使得 $f^{-n}(U)\cap V\neq\varnothing$.由 $\overline{A(f)}=X$ 知 $\exists x\in A(f)\cap f^{-n}(U)\cap V$,即有 $x\in V$ 满足 $f^n(x)\in U$.又由 $f^n(U)$ 的连续性可知,存在 x 的邻域 $D\subset V$ 使得 $f^n(D)\subset U$.由于 $x\in A(f)$,因此 $\exists L$ 使得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{n}\#[\{i\mid f^i(x)\cap D\}\cap\{0,1,\cdots,nL-1\}]\geqslant 1/L$,即 f 是拓扑遍历的.

参考文献:

[1] LIAO Gong-fu,WANG Li-yan. Almost Periodicity,Chain Recurrence and Chaos [J]. Israel J. Math.,1996,93:145 - 156.

[2] 李 楠.几乎周期点稠密的混沌性态 [J].长春大学学报,2011(2):59 - 63.

[3] LI Tian-yan,YORKE J. Period Three Implies Chaos Amer [J]. Math. Monthly,1975,82:985 - 992.

[4] 王家强.代换系统与混沌 [D].吉林:吉林大学,2008.

[5] MARTÍNE Q. Substitution Dynamical Systems-Spectral Analysis [M]//Lecture Notes in Math. Berlin Heideberg:Springer-Verlag,1987.

[6] 周作领.符号动力系统 [M].上海:上海科技教育出版社,1997.

[7] 王 辉,范钦杰.集值离散动力系统的拓扑遍历性、拓扑熵与混沌 [J].吉林大学学报:理学版,2007(11):903 - 906.

Topological Ergodicity of Almost Periodic Points Dense

LI Nan[1],DONG Ming-hui[2],WANG Xin-miao[2]

(1. Boda College of Jilin Normal University,Siping 136000,Jilin China;2. No. 3 High School of Benxi City,Benxi 117000,Jilin China)

Abstract:The authors constructed the almost periodic point dense system based on minimal mapping, studied the relation between the almost periodic point dense system and Li-Yorke chaos by using topological transitivity and density,and proved the topological ergodicity of the almost periodic points dense system under certain conditions. The study established the relation between the almost periodic point dense system and topological ergodicity,and had some enlightenments on the further studying of the characteristics of the measure centre of the almost periodic points dense system.

Key words:almost periodic points;transitive;topological ergodicity

(责任编辑 向阳洁)