第 32 卷　第 3 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 32　No. 3
2011 年 5 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　May 2011

文章编号:1007-2985(2011)03-0026-04

线性流形上 W 准反对称矩阵反问题的最小二乘解*

唐耀平,周立平
(湖南科技学院数学与计算科学系,湖南 永州　425100)

摘　要:研究了线性流形上 W 反对称矩阵反问题的最小二乘解及其逼近问题,给出了最小二乘解的一般表达式,并就该问题的特殊情况——矩阵反问题,获得了有解的充分必要条件,在有解的条件下得到了解的一段表达式.

关键词:W 准反对称矩阵;线性流形;最小二乘解;最佳逼近
中图分类号:O241.6　　　　文献标志码:A

近年来,矩阵方程与线性流形上反问题的最小二乘律的研究已取得许多成果[1-3]. 文献[4-6]研究了线性流形上 D 反对称矩阵反问题的最小二乘解及其逼近问题. 文献[7]中定义了 W 准反对称矩阵,并讨论了 W 准反对称矩阵反问题的最小二乘解及其逼近问题. 笔者进而研究线性流形上 W 准反对称矩阵反问题的最小二乘解及其逼近问题.

首先,设 $\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 表示 $n\times m$ 阶实矩阵集合,$\boldsymbol{SR}^{n\times n}$ 表示所有 n 阶实对称矩阵集合,$\boldsymbol{ASR}^{n\times n}$ 表示所有 n 阶实反对称矩阵集合,$\boldsymbol{OR}^{n\times n}$ 表示所有 n 阶实正交阵集合,$\boldsymbol{I}_n$ 表示 n 阶单位阵,$\boldsymbol{A}^+$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 MoorePenrose 广义逆,$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积. 在 $\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 中引入内积,设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$,定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积为 $\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$,其中"tr"表示方阵的迹,由内积诱导的范数为 $\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\rangle}=\sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}$. 显然,此范数为 Frobenius 范数,$\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 构成一个完备的内积空间.

定义 1　给定 $\boldsymbol{W}$ 为对称正定矩阵,若 $(\boldsymbol{WA})^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{WA}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{W}$ 准反对称矩阵. $n\times n$ 型 $\boldsymbol{W}$ 准对称矩阵的全体记为 $\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{ASR}^{n\times n}$,即 $\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{ASR}^{n\times n}=\{\boldsymbol{A}\mid(\boldsymbol{WA})^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{WA}\}$.

令

$$S=\{\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{ASR}^{n\times n}\mid\boldsymbol{AZ}=\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{WZ})^+(\boldsymbol{WZ}),\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WY}=-\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WZ},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{R}^{n\times k}\}.\tag{1}$$

由文献[1]知 S 是非空的线性流形. 文中讨论以下 2 个问题,其中 $\|\cdot\|$ 为 Frobenius 范数,S_E 为问题 Ⅰ 的解集:

问题 Ⅰ　给定 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$,求 $\boldsymbol{A}\in S$,使得 $f(\boldsymbol{A})\triangleq\|\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{B}\|=\min$.

问题 Ⅱ　给定 $\boldsymbol{A}^*\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$,求 $\hat{\boldsymbol{A}}\in S_E$,使得 $\|\boldsymbol{A}^*-\hat{\boldsymbol{A}}\|=\min\limits_{\boldsymbol{A}\in S_E}\|\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{A}\|$.

1　几个引理

设 $\boldsymbol{WZ}$ 有如下奇异值分解:

$$\boldsymbol{WZ}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}},\tag{2}$$

* 收稿日期:2011-01-07
基金项目:湖南省科技厅科技专项计划项目(2009FJ4060);湖南省教育厅科研项目(09c442)
作者简介:唐耀平(1973-),男,湖南永州人,湖南科技学院数学与计算科学系副教授,硕士,主要从事矩阵反问题及数学模型研究.

其中 $U=(U_1,U_2)\in OR^{n\times n}$，$U_1\in R^{n\times r}$，$V=(V_1,V_2)\in OR^{m\times m}$，$V_1\in R^{m\times r}$，$\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$，$\sigma_i>0$，$i=1,2,\cdots,r$.

引理 1[7]　设 WZ 有奇异值分解(2). 令

$$Y_0=\begin{bmatrix}U_1^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1} & -\Sigma^{-1}V_1^{\mathrm T}Y^{\mathrm T}U_2\\ U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1} & 0\end{bmatrix},\tag{3}$$

则(1)式中的集合 S 具有下面的形式：

$$S=\left\{UY_0U^{\mathrm T}W+U\begin{pmatrix}0&0\\0&H\end{pmatrix}U^{\mathrm T}W\mid\ \forall H\in ASR^{(n-r)(n-r)}\right\}.\tag{4}$$

引理 2[7]　已知 $X,B\in R^{n\times m}$，设 X 的奇异值分解为 $X=P\begin{pmatrix}\Gamma&0\\0&0\end{pmatrix}Q^{\mathrm T}$，其中 $P=(P_1,P_2)\in OR^{n\times n}$，$P_1\in R^{n\times s}$，$Q=(Q_1,Q_2)\in OR^{m\times m}$，$Q_1\in R^{m\times s}$，$\Gamma=\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s)>0$. 令 $\varphi_{ij}=\dfrac{1}{\gamma_i^2+\gamma_j^2}$，$i,j\in[1,s]$，$\varphi=(\varphi_{ij})\in R^{s\times s}$.

(ⅰ) $\|AX-B\|=\min$ 在 $ASR^{n\times n}$ 中的解集为

$$S_A=\left\{P\begin{bmatrix}\varphi*(P_1^{\mathrm T}BQ_1\Gamma-\Gamma Q_1^{\mathrm T}B_1^{\mathrm T}P_1) & -\Gamma^{-1}Q_1^{\mathrm T}B^{\mathrm T}P_2\\ P_2^{\mathrm T}BQ_1\Gamma^{-1} & G\end{bmatrix}P^{\mathrm T},\ \forall G\in ASR^{(n-s)(n-s)}\right\}.$$

(ⅱ) $AX=B$ 在 $ASR^{n\times n}$ 中有解的充分条件为 $B=BX^{+}X$，$X^{\mathrm T}B=-B^{\mathrm T}X$，且有解时，其解集为

$$S_O=\left\{P\begin{bmatrix}P_1^{\mathrm T}BQ_1\Gamma^{-1} & -\Gamma^{-1}Q_1^{\mathrm T}B^{\mathrm T}P_2\\ P_2^{\mathrm T}BQ_1\Gamma^{-1} & G\end{bmatrix}P^{\mathrm T},\ \forall G\in ASR^{(n-s)(n-s)}\right\}.$$

引理 3[6]　$\forall A\in R^{n\times n}$，则存在唯一的 $A_1\in W^{-1}SR^{n\times n}$，$A_2\in WASR^{n\times n}$，使得

$$\langle A_1,A_2\rangle=0\ 且\ A=A_1+A_2.$$

其中：$A_1=W^{-1}G*(W^{-1}A+A^{\mathrm T}W^{-1})$；$A_2=G*(AW^{-1}-W^{-1}A^{\mathrm T})W^{-1}$；$G=(g_{ij})$，$g_{ij}=\dfrac{1}{d_i^{-4}+d_j^{-4}}$，$i,j=1,2,\cdots,n$.

2　主要结果

定理 1　已知 $X,B\in R^{n\times m}$，令 $U^{\mathrm T}WX=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$，$X_1\in R^{r\times m}$，$X_2\in R^{(n-r)\times m}$，$\widetilde B=U^{\mathrm T}B-Y_0U^{\mathrm T}WX\triangleq\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$，$B_1\in R^{r\times m}$. 设 X_2 的奇异值分解为 $X_2=P\begin{pmatrix}\Gamma&0\\0&0\end{pmatrix}Q^{\mathrm T}=P_1\Gamma Q_1^{\mathrm T}$，其中 $P=(P_1,P_2)\in OR^{(n-r)\times(n-r)}$，$P_1\in R^{(n-r)\times s}$，$Q=(Q_1,Q_2)\in OR^{m\times m}$，$Q_1\in R^{m\times s}$，$\Gamma=\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s)>0$. 令 $\varphi_{ij}=\dfrac{1}{\gamma_i^2+\gamma_j^2}$，$i,j\in[1,s]$，$\varphi=(\varphi_{ij})\in R^{s\times s}$. 则问题 Ⅰ 的解集为

$$S_A=\left\{UY_0U^{\mathrm T}W+U\begin{pmatrix}0&0\\0&G\end{pmatrix}U^{\mathrm T}W\right\},\tag{5}$$

其中 $G=P\begin{bmatrix}\varphi*(P_1^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma-\Gamma Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_1) & -\Gamma^{-1}Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_2\\ P_2^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma^{-1} & H\end{bmatrix}P^{\mathrm T}$，$\forall H\in ASR^{(n-s-r)\times(n-s-r)}$.

证明　$\forall A\in S$，注意到 U 为正交矩阵，由引理 1 有

$$f(A)=\|AX-B\|^2=\left\|UY_0U^{\mathrm T}WX+U\begin{pmatrix}0&0\\0&G\end{pmatrix}U^{\mathrm T}WX-B\right\|^2=\left\|Y_0U^{\mathrm T}WX+\begin{pmatrix}0&0\\0&G\end{pmatrix}U^{\mathrm T}WX-U^{\mathrm T}B\right\|^2=\left\|\begin{pmatrix}0\\GX_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}\right\|^2=\|B_1\|^2+\|GX_2-B_2\|^2.$$

因此，$\|AX-B\|=\min$，$A\in S$，当且仅当

$$\|GX_2-B_2\|=\min\qquad G\in ASR^{(n-r)\times(n-r)}.\tag{6}$$

由引理2知,(6)式的解G的表达式为

$$G=P\begin{pmatrix}\varphi*(P_1^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma-\Gamma Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_1) & -\Gamma^{-1}Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_2\\ P_2^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma^{-1} & H\end{pmatrix}P^{\mathrm T}\qquad \forall H\in ASR^{(n-s-r)\times(n-s-r)}. \tag{7}$$

将(7)式代入到(4)式,则问题Ⅰ得到解集合(6).证毕.

定理2 假定条件和符号与定理1一致,问题Ⅰ中$f(A)=\|AX-B\|=0(A\in S)$的充分必要条件是

$$B_1=0, \tag{8}$$

$$X_2^{\mathrm T}B_2=-B_2^{\mathrm T}X_2,B_2=B_2X_2^{+}X_2, \tag{9}$$

且当(8)和(9)式成立时,$f(A)=\|AX-B\|=0$的解集为

$$S_O=\{UY_0U^{\mathrm T}W+U\begin{pmatrix}0&0\\0&G\end{pmatrix}U^{\mathrm T}W\}, \tag{10}$$

其中$G=P\begin{pmatrix}P_1^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma^{-1} & -\Gamma^{-1}Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_2\\ P_2^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma^{-1} & H\end{pmatrix}P^{\mathrm T},\forall H\in ASR^{(n-r-s)\times(n-r-s)}$.

证明 由定理1的证明过程可知$f(A)=\|AX-B\|=0(A\in S)$等价于

$$B_1-0,$$

$$GX_2=B_2\qquad G\in ASR^{(n-r)\times(n-r)}. \tag{11}$$

由引理2知,(11)式等价于$X_2^{\mathrm T}B_2=-B_2^{\mathrm T}X_2,B_2=B_2X_2^{+}X_2$.因此,$f(A)=\|AX-B\|=0(A\in S)$等价于(8)和(9)式.

再由引理2可知(11)式的解G的表达式为

$$G=P\begin{pmatrix}P_1^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma^{-1} & \Gamma^{-1}Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_2\\ P_2^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma^{-1} & H\end{pmatrix}P^{\mathrm T}\qquad \forall H\in SR^{(n-s)\times(n-s)}. \tag{12}$$

将(12)式代入(5)式得$f(A)=0$的解集(10).

定理3 给定$A^*\in R^{n\times n}$,符号与条件与定理1相同,对问题Ⅰ的解集合S_A,相应问题Ⅱ的最佳逼近解存在唯一且表示为

$$\hat{A}=UY_0U^{\mathrm T}W+U\begin{pmatrix}0&0\\0&G\end{pmatrix}U^{\mathrm T}W. \tag{13}$$

其中:

$$G=P\begin{pmatrix}\varphi*(P_1^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma-\Gamma Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_1) & -\Gamma^{-1}Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_2\\ P_2^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma^{-1} & P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}A_1^*W^{-1}U_2P_2\end{pmatrix}P^{\mathrm T},$$

$$A_1^*=W^{-1}\bar{G}*(W^{-1}A^*-A^{*\mathrm T}W^{-1}),$$

$$\bar{G}=(g_{ij}),g_{ij}=\frac{1}{d_i^{-4}+d_j^{-4}}\qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

证明 $\forall A^*\in R^{n\times n}$,由引理3知,存在唯一的$A_1^*\in W^{-1}ASR^{n\times n}$及$A_2^*\in WSR^{n\times n}$,使得$A^*=A_1^*+A_2^*$,且$\langle A_1^*,A_2^*\rangle=0$,其中$A_1^*=W^{-1}\bar{G}*(W^{-1}A^*-A^{*\mathrm T}W^{-1})$.$\forall A\in S_A$,由(3)和(5)式及$F$范数的正交不变性可知,

$$\begin{aligned}\|A^*-A\|^2&=\|A_2^*\|^2+\|A_1^*-A\|^2=\|A_2^*\|^2+\|A_1^*-U\begin{pmatrix}U_1^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1} & -\Sigma^{-1}V_1^{\mathrm T}Y^{\mathrm T}U_2\\ U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1} & G\end{pmatrix}U^{\mathrm T}W\|^2=\\ &\|A_2^*\|^2+\|U^{\mathrm T}A_1^*-\begin{pmatrix}U_1^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1} & -\Sigma^{-1}V_1^{\mathrm T}Y^{\mathrm T}U_2\\ U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1} & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1^{\mathrm T}W\\ U_2^{\mathrm T}W\end{pmatrix}\|^2=\\ &\|A_2^*\|^2+\|U_1^{\mathrm T}A_1^*-U^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1}U_1^{\mathrm T}W+\Sigma^{-1}V_1^{\mathrm T}Y^{\mathrm T}U_2U_2^{\mathrm T}W\|^2+\\ &\|U_2^{\mathrm T}A_1^*-U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1}U_1^{\mathrm T}W-GU_2^{\mathrm T}W\|^2.\end{aligned} \tag{14}$$

因为

$$\|U_2^{\mathrm T}A_1^*-U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1}U_1^{\mathrm T}W-GU_2^{\mathrm T}W\|^2=\|U_2^{\mathrm T}A_1^*-U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1}U_1^{\mathrm T}W-$$

$$P\begin{pmatrix}\varphi*(P_1^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma-\Gamma Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_1) & -\Gamma^{-1}Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_2\\ P_2^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma^{-1} & H\end{pmatrix}P^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W\|^2=$$

$$\|P^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}A_1^*-P^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1}U_1^{\mathrm T}W-\begin{pmatrix}\varphi*(P_1^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma-\Gamma Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_1) & -\Gamma^{-1}Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_2\\ P_2^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma^{-1} & H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W\\ P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W\end{pmatrix}\|^2=$$

$$\|\begin{pmatrix}P_1^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}A_1^*-P_1^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1}U_1^{\mathrm T}W\\ P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}A_1^*-P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1}U_1^{\mathrm T}W\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\varphi*(P_1^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma-\Gamma Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_1) & -\Gamma^{-1}Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_2\\ P_2^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma^{-1} & H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W\\ P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W\end{pmatrix}\|^2=$$

$$\|P_1^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}A_1^*-P_1^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1}U_1^{\mathrm T}W-\varphi*(P_1^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma-\Gamma Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_1)P_1^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W+\Gamma^{-1}Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_2P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W\|^2+$$
$$\|P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}A_1^*-P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1}U_1^{\mathrm T}W-P_2^{\mathrm T}B_2Q\Gamma^{-1}P_1^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W-HP_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W\|^2, \tag{15}$$

所以,由(14)和(15)式知 $\|A^*-A\|=\min(A\in S_A)$ 等价于

$$\|P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}A_1^*-P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1}U_1^{\mathrm T}W-P_2^{\mathrm T}B_2Q\Gamma^{-1}P_1^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W-HP_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W\|^2=\min, \tag{16}$$

$\forall W\in ASR^{(n-r-s)\times(n-r-s)}$,当

$$P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}A_1^*-P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}YV_1\Sigma^{-1}U_1^{\mathrm T}W-P_2^{\mathrm T}B_2Q\Gamma^{-1}P_1^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W-HP_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W=0. \tag{17}$$

(16)式有极小解,注意到 $U_2^{\mathrm T}U_2=I, U_1^{\mathrm T}U_2=0, P_1^{\mathrm T}P_2=0, P_2^{\mathrm T}P_2=I$. 化简(17)式得

$$H=P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}A_1^*W^{-1}U_2P_2. \tag{18}$$

因为由 $A_1^*\in W^{-1}ASR^{n\times n}$,得

$$H^{\mathrm T}=P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}(A_1^*W^{-1})^{\mathrm T}U_2P_2=P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}W^{-1}A_1^{*\mathrm T}U^2P_2=-P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}A_1^*W^{-1}U_2P_2=-H.$$

所以(18)式为(16)式的极小解.将(18)式代入(5)式得问题Ⅱ的解(13).证毕.

由定理 2 及定理 3 可直接得到下面结论:

推论 1　给定 $A^*\in R^{n\times n}$,符号和条件与定理 2 一致,设 S_O 为问题Ⅰ中 $f(A)=0(A\in S)$ 的解集,则在 S_O 中存在唯一的 $\hat A$,使得 $\|A^*-\hat A\|=\min$,且 $\hat A=UY_0U^{\mathrm T}W+U\begin{pmatrix}0&0\\0&H\end{pmatrix}U^{\mathrm T}W$,其中 $H=P\begin{pmatrix}P_1^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma^{-1} & -\Gamma^{-1}Q_1^{\mathrm T}B_2^{\mathrm T}P_2\\ P_2^{\mathrm T}B_2Q_1\Gamma^{-1} & P_2^{\mathrm T}U_2^{\mathrm T}A_1^*W^{-1}U_2P_2\end{pmatrix}P^{\mathrm T}$.

参考文献:

[1] 孙继广.实对称矩阵的两类逆特征值问题[J].计算数学,1988(3):282-290.
[2] 谢冬秀.线性流形上的逆特征值问题[J].高等学校计算数学学报,1993(4):374-380.
[3] 张　磊,谢冬秀,胡锡炎.线性流形上双对称阵逆特征值问题[J].计算数学,2000(2):129-138.
[4] 张忠志,周富照,胡锡炎.线性流形上 D 反对称矩阵反问题的最小二乘解[J].湖南大学学报,2002,29(5):4-8.
[5] 唐耀平.线性流形上 W 准对称矩阵反问题的最小二乘解[J].高师理科学刊,2009,29(3):17-20.
[6] 唐耀平.W 准对称矩阵反问题的最小二乘解[J].湖南科技学院学报,2006,27(11):109-113.
[7] 唐耀平.W 准反对称矩阵反问题的最小二乘解[J].武汉大学学报:理学版,2009,55(6):651-655.

Least-Square Solutions of Inverse Problems of *W*-Para-Anti-Symmetric Matrix on the Linear Manifold

TANG Yao-ping, ZHOU Li-ping
(Dept. of Mathematics and Computer Science, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou 425100, Hunan China)

Abstract: The least-squares solutions of inverse problems of **W**-para-anti-symmetric matrix on the linear manifold is discussed, and the general expressions of the solution are obtained. Moreover, for the special case of the least-squares problems, the necessary and sufficient conditions for the solvability and the general solution of this problems are given.

Key words: *W*-para-anti-symmetric matrix; linear manifold; least-squares solution; optimal approximation

(责任编辑　向阳洁)