

文章编号:1007-2985(2011)04-0050-05

耗散腔场中双光子 Tavis-Cummings 模型 量子纠缠分析*

伊 健, 邬云文

(吉首大学物理科学与信息工程学院, 湖南 吉首 416000)

摘 要:用共生纠缠度度的方法来研究两原子在耗散和非耗散腔场中的量子纠缠. 研究表明:通过控制相互作用时间能够制备出最大纠缠态;且由于原子的双光子跃迁,导致双光子 Tavis-Cummings 模型是单光子 Tavis-Cummings 模型在制备最大纠缠态上所需要的时间的. 且原子的自发辐射和腔场的损耗使得两原子的最大相干随时间呈周期性减小.

关键词:双光子 Tavis-Cummings 模型;量子相干;共生纠缠度;自发辐射系数;腔场的损耗

中图分类号:O431

文献标志码:A

纠缠在量子信息理论中扮演着重要的角色. 一般的来说,在研究量子理论中它被认为是一种重要的资源,如量子计算与传送^[1-3],超密集编码^[4]和量子隐形传态^[5-6]. 因此为了控制量子相干和纠缠,人们对其进行了广泛的研究^[7-8]. 自从 Yu 和 Eberly^[9-10]对纠缠突然衰减的现象展开研究工作之后,近年来两原子系统相干动力学引起了极大的关注^[11-17]. 研究人员发现:即使系统中环境因素引发的衰退是缓慢的,量子纠缠也会出现突然为零的现象,即被称为纠缠猝死现象(ESD). 目前,这个现象已经在量子光学实验中被证实^[18],而在纠缠猝死之后,又会出现纠缠突然恢复现象(Entanglement Sudden Birth)^[19]. 因此,对于多原子系统相干动力学研究一直被关注着^[20]. 在研究量子信息和计算中,两粒子或者多粒子系统被作为重要的研究对象. 复合系统中的纠缠不能简单写成各个单一系统态矢的直积形式,但相干又是量子力学的本质特征,因此相干经常被用在量子信息处理领域,例如量子远程控制与交换. 此外,相干不仅是检验量子力学基本问题的有力工具,也是信息科学的基本组成部分^[21].

笔者研究了光场中双光子 T-C 模型的量子相干,主要讨论了在耗散和无耗散 2 种情况下 2 个原子的共生纠缠度随时间的演化. 分析了原子自发辐射和腔场衰变对共生纠缠度的影响,结果表明:这些因素会抑制原子的纠缠,且在相同条件下,双光子 T-C 模型制备最大纠缠度的时间是单光子 T-C 模型制备最大纠缠态的时间.

1 模型和最大纠缠度的制备

考虑 2 个二能级原子和双光子场相互作用,如图 1 所示,其中:原子系统的跃迁频率是 ω_0 ;基态用 $|g\rangle$ 表示;激发态用 $|e\rangle$ 表示. 为简单起见,笔者考虑两原子是全同的,且 \hbar 取自然单位 1,则旋波近似下系统的哈密顿量可以为

* 收稿日期:2011-05-12

基金项目:湖南省科技厅计划课题资助项目(2010FJ3081)

作者简介:伊 健(1981-),男,安徽合肥人,吉首大学物理科学与信息工程学院硕士生,主要从事量子光学研究

通讯作者:邬云文(1965-),女,湖南龙山人,吉首大学物理科学与信息工程学院教授,主要从事量子光学研究.

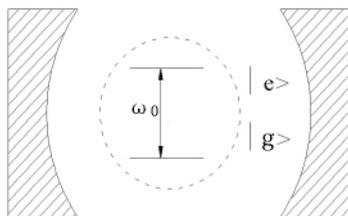


图 1 二能级原子在腔场中的跃迁示意图

$$H = \sum_{j=1,2} \omega_0 \sigma_z^j + \omega a^\dagger a + \sum_{j=1,2} \epsilon_j ((a^\dagger)^2 \sigma_z^j + a^2 \sigma_+^j), \quad (1)$$

其中: ω_0 是原子的跃迁频率; σ_z^j, σ_+^j 和 σ_-^j 分别是 $j (j = 1, 2)$ 个原子的赝自旋算符; a^\dagger 和 a 分别是产生和湮灭算符; ω 是腔场频率; ϵ_j 是第 $j (j = 1, 2)$ 原子与腔场的耦合常数. 假设在共振的情况下, $2\omega = \omega_0$. 在相互作用绘景中, 系统的哈密顿量可以写为^[22]

$$H_I = \epsilon_1 ((a^\dagger)^2 \sigma_-^1 + a^2 \sigma_+^1) + \epsilon_2 ((a^\dagger)^2 \sigma_-^2 + a^2 \sigma_+^2). \quad (2)$$

令初始时 $t = 0$ 腔场处在真空态, 而两原子处在 $|e_1\rangle |g_2\rangle |0\rangle$, 令 $t > 0$ 系统的态矢可以表示为

$$|\Psi(t)\rangle = a(t) |e_1\rangle |g_2\rangle |0\rangle + b(t) |g_1\rangle |e_2\rangle |0\rangle + c(t) |g_1\rangle |g_2\rangle |2\rangle, \quad (3)$$

其中 $a(t), b(t)$ 和 $c(t)$ 分别是相应态矢的概率幅. 将(2)式代入到相互作用绘景中的薛定谔方程即得系统的态矢随时间的演化为

$$|\Psi(t)\rangle = \left[\frac{2\epsilon_1^2}{\tau^2} \cos(\tau t) - \frac{2\epsilon_1^2}{\tau^2} + 1 \right] |e_1\rangle |g_2\rangle |0\rangle + \left[\frac{2\epsilon_1\epsilon_2}{\tau^2} \cos(\tau t) - \frac{2\epsilon_2\epsilon_1}{\tau^2} \right] |g_1\rangle |e_2\rangle |0\rangle - i \frac{\sqrt{2}\epsilon_1}{\tau} \sin(\tau t) |g_1\rangle |g_2\rangle |2\rangle, \quad (4)$$

其中 $\tau = \sqrt{2(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)}$. 由(4)式可以求得系统的密度矩阵为

$$\rho = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| = \begin{pmatrix} |\gamma|^2 & \beta\gamma^* & \alpha\gamma^* & 0 \\ \gamma\beta^* & |\beta|^2 & \alpha\beta^* & 0 \\ \gamma\alpha^* & \beta\alpha^* & |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中: $\alpha = \frac{2\epsilon_1^2}{\tau^2} - \frac{2\epsilon_1^2}{\tau^2} \cos(\tau t) + 1; \beta = \frac{2\epsilon_2\epsilon_1}{\tau^2} - \frac{2\epsilon_2\epsilon_1}{\tau^2} \cos(\tau t) + 1; \gamma = i \frac{\sqrt{2}\epsilon_1}{\tau} \sin(\tau t); \alpha^*, \beta^*$ 和 γ^* 分别是它们的复共轭.

为研究两原子之间的相干, 笔者使用共生纠缠度来度量^[23], 即

$$C(\rho) = \max(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}), \quad (6)$$

其中 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是久期方程 $\rho(\sigma_y^1 \otimes \sigma_y^2) \rho^* (\sigma_y^1 \otimes \sigma_y^2) = \lambda$ 的解按从大到小的顺序排列 (σ_y 为泡利矩阵, ρ_{AB}^* 为 ρ_{AB} 的复共轭矩阵), 所以这个系统的共生纠缠度可以表示为

$$C(\rho_{AB}) = \max\{0, 2 |\rho_{23}(t)| - 2 \sqrt{\rho_{11}(t)\rho_{44}(t)}\} = \max(0, |2[\frac{2\epsilon_1^2}{\tau^2} - \frac{2\epsilon_1^2}{\tau^2} \cos(\tau t) + 1][\frac{2\epsilon_1\epsilon_2}{\tau^2} - \frac{2\epsilon_1\epsilon_2}{\tau^2} \cos(\tau t)]|). \quad (7)$$

耦合常数的大小 ϵ_j 依赖与原子在腔中的位置并且满足 $\epsilon = \epsilon_0 e^{-r^2/w^2}$. 其中: ϵ_0 是原子在腔的中心位置的耦合常数; w 是腔模的距离; r 是到腔中心的距离(图 2)^[24]. 图 2 中, 原子发射源 S 和探测器 D 分别放在两边, 腔的直径是 d . 因此, 当把原子 1 放在腔场中间而原子 2 离中心 $r = w \ln^{1/2}(\sqrt{2} + 1)$ 的位置^[25], 即可实现 $\epsilon_1 = (\sqrt{2} + 1)\epsilon_2$, 取 $\epsilon_2 = 1$, 则 $\epsilon_1 = \sqrt{2} + 1$ 两原子共生纠缠度随时间的演化如图 3 所示.

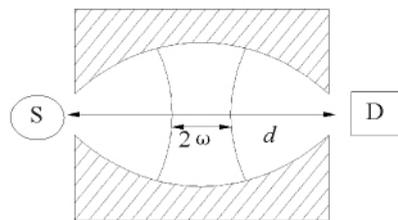


图 2 实验示意图

从图 3 可以看出当 $t = \pi/(2\sqrt{2+\sqrt{2}}), 3\pi/(2\sqrt{2+\sqrt{2}}), \dots, (2n+1)\pi/(2\sqrt{2+\sqrt{2}})$ 时, 两原子的共生纠缠度达到最大值 $C(\rho_{AB}) = 1$, 即处于最大相干; 当 $t = \pi/(2\sqrt{2+\sqrt{2}})$ 时 $\cos(\tau t) = 1$, 则此时两原子都处于基态的概率幅为 0, 这样整个系统态可写成两原子态与真空态的直积形式, 这相当于原子和场不发生相互作用, 则处于最大纠缠态. 此时系统的态矢可以写成

$$|\Psi(t)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle |g_2\rangle + |g_1\rangle |e_2\rangle) |0\rangle. \quad (8)$$

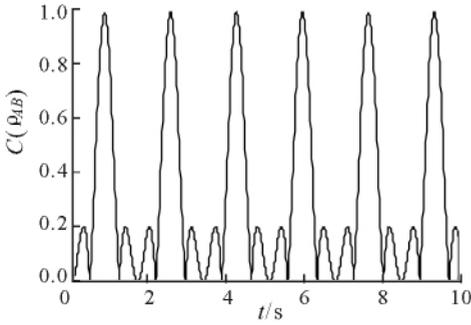


图 3 无耗散腔场中两原子共生纠缠度随时间演化图

一些,能够更快的制备出最大纠缠态。

2 原子和腔场的消相干作用

在(2)式的基础上考虑原子的自发辐射和腔场衰变的影响,则系统的哈密顿量可以写成

$$H_I' = \sum_{j=1,2} \epsilon_j (a^{+2} \sigma_j^- + a^2 \sigma_j^+) - i\Gamma \sum_{j=1,2} |e_j\rangle \langle e_j| - i\kappa a^{+2} a^2, \quad (10)$$

其中: Γ 是原子的自发辐射系数; κ 是场衰变系数.如果系统的初始时刻的态矢是 $|e_1\rangle |g_2\rangle |0\rangle$,那么在 $t > 0$ 时刻系统的态矢为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \left\{ -\frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} (e^{-\Gamma t} - e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t} \cos(\alpha t)) - \frac{2\kappa - \Gamma}{2\alpha} e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t} \sin(\alpha t) + e^{-\Gamma t} \right\} |e_1\rangle |g_2\rangle |0\rangle - \\ & \left\{ \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} (e^{-\Gamma t} - e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t} \cos(\alpha t)) - \frac{2\kappa - \Gamma}{2\alpha} e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t} \sin(\alpha t) \right\} |g_1\rangle |e_2\rangle |0\rangle - \\ & i \frac{\sqrt{2}\epsilon_1}{\alpha} e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t} \sin(\alpha t) |g_1\rangle |g_2\rangle |2\rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\alpha = \sqrt{2\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - \frac{(2\kappa - \Gamma)^2}{4}}$.假设 $\kappa = \frac{\Gamma}{2}$,即 $\alpha = \tau$,此时,系统的态矢

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \left\{ -\frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} (e^{-\Gamma t} - e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t} \cos(\tau t)) + e^{-\Gamma t} \right\} |e_1\rangle |g_2\rangle |0\rangle - \\ & \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} (e^{-\Gamma t} - e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t} \cos(\tau t)) |g_1\rangle |e_2\rangle |0\rangle - \\ & i \frac{\sqrt{2}\epsilon_1}{\alpha} e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t} \sin(\tau t) |g_1\rangle |g_2\rangle |2\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

两原子共生纠缠度为

$$C'(\rho_{AB}) = \max(0, 2 \left[-\frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} (e^{-\Gamma t} - e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t} \cos(\alpha t)) + e^{-\Gamma t} \right] \left[-\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} (e^{-\Gamma t} - e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t} \cos(\alpha t)) \right]). \quad (13)$$

选取 $\Gamma = 0.01\epsilon_2$,满足自发辐射系数远小于耦合系数条件,共生纠缠度随时间的变化如图4所示,参数

$\Gamma = 0.01\epsilon_2$ 和 $\epsilon_1 = (\sqrt{2} + 1)\epsilon_2$.

将图4与图3比较可以看出两原子的最大相干在原子的自发辐射和腔场衰变的影响下,随时间呈周期性减小.从(11)式可以看出当 $t = \pi/(2\sqrt{2 + \sqrt{2}})$,两原子系统的态矢为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\Gamma t}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}} (|e_1\rangle |g_2\rangle + \\ & |g_1\rangle |e_2\rangle) |0\rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

此时,两原子同时处于基态的概率幅为0,这时候相当于原子和场之间没有相互作用,此时两原子处于最大纠缠态,可得到双光子 T-C 模型中实现最大纠缠的周期为 $1/\sqrt{2(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)}$.而单光子 T-C 模型下的哈密顿量为

$$H = \sum_{j=1,2} \omega \sigma_j^z + \omega a^+ a + \sum_{j=1,2} \epsilon_j (a^+ \sigma_j^- + a \sigma_j^+). \quad (9)$$

运用上面的方法,笔者可以很容易得出纠缠周期为 $1/\sqrt{(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)}$,所以双光子 T-C 模型实现最大纠缠的周期比单光子 T-C 模型实现最大纠缠的时间要短

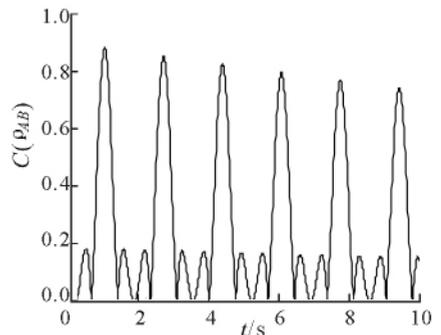


图 4 耗散腔场中两原子的共生纠缠度随时间演化图

而此时的共生纠缠度 $C'(\rho_{AB}) = 0.988$, 而当为 $\varepsilon_2 t = \pi/(2\sqrt{2+\sqrt{2}}), 3\pi/(2\sqrt{2+\sqrt{2}}), \dots, (2n+1)\pi/(2\sqrt{2+\sqrt{2}})$, 随着 t 增大时, $e^{-\Gamma}$ 和 $e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t}$ 均减小, 而此时的共生纠缠度为

$$C'(\rho_{AB}) = \max(0, 2[\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}(e^{-\Gamma} + e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t} - e^{-\Gamma})][\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}(e^{-\Gamma} + e^{-\frac{2\kappa+\Gamma}{2}t})]), \quad (15)$$

所以耗散随时间削弱了原子之间的纠缠程度.

3 结论

笔者主要研究共振情况下双光子 T-C 模型与光场的相互作用时的原子纠缠态. 结果表明: 在控制相互作用时间的情况下, 双光子 T-C 模型的实现最大纠缠的周期是单光子 T-C 模型的 $1/\sqrt{2}$ 倍, 可以更快的制备出最大纠缠态. 此外, 笔者也考虑了微弱的原子自发辐射和腔场衰变的影响, 在此影响下两原子的最大相干随时间呈现周期状逐渐减小趋势, 更加接近实际情况.

参考文献:

- [1] MICHAEL A, NIELSEN, ISAAC L, CHUANG. Quantum Computation and Quantum Information [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [2] SHOR P W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer [J]. Siam J. Comp, 1997, 26(5): 1 484.
- [3] BENNET C H, BRASSARD G, CREPEAU C, et al. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels [J]. Phys. Rev. Lett., 1993, 70: 1 895.
- [4] BENNETT C H, WIESNER S J. Communication Via One-and Two-Particle Operators on Einstein-Podolsky-Rosen States [J]. Phys. Rev. Lett., 1992, 69: 2 881.
- [5] EKERT A K. Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem [J]. Phys. Rev. Lett., 1991, 67: 661 - 663.
- [6] CURTY M, LEWENSTEIN M, LUTKENHAUS N. Entanglement as a Precondition for Secure Quantum Key Distribution [J]. Phys. Rev. Lett., 2004, 92: 217 903.
- [7] DUN L M, Guo G C. Prevention of Dissipation with Two Particles [J]. Phys. Rev. A, 1998, 57: 2399.
- [8] VIOLA L, FORTUNATO E M, PRAVIA M A, et al. Experimental Realization of Noiseless Subsystems for Quantum Information Processing [J]. Science, 2001, 293: 2059.
- [9] YU T, EBERLY J H. Sudden Death of Entanglement: Classical Noise Effects [J]. Optics Communications, 2006, 264: 393 - 397.
- [10] YU T, EBERLY J H. Evolution from Entanglement to Decoherence of Bipartite Mixed "X" States [J]. Quantum Information and Computation, 2007(7): 459.
- [11] CUI H T, LI K, YI X X. A Study on the Sudden Death of Entanglement [J]. Phys. Lett. A, 2007, 365: 44.
- [12] ADBEL-ATY M, MOYA-CESSA H. Sudden Death and Long-Lived Entanglement of Two Trapped Ions [J]. Phys. Lett. A, 2007, 369: 372 - 376.
- [13] ANN K, JAEGER G. Disentanglement and Decoherence in Two-Spin and Three-Spin Systems Under Dephasing [J]. Phys. Rev. B, 2007, 75: 115 307.
- [14] VAGLICA A, VETRI G. Irreversible Decay of Nonlocal Entanglement Via a Reservoir of a Single Degree of Freedom [J]. Phys. Rev. A, 2007, 75: 062 120.
- [15] AL-QASIMI A, JAMES D F V. Sudden Death of Entanglement at Finite Temperature [J]. Phys. Rev. A, 2008, 77: 012 117.
- [16] LI J, CHALAPAT K, PARAOANU G S. Entanglement of Superconducting Qubits Via Microwave Fields: Classical and Quantum Regimes [J]. Phys. Rev. B, 2008, 78: 064 503.
- [17] CHEN L, SHAO X Q, ZHANG S. The Influences of Dipole-Dipole Interaction and Detuning on the Sudden Death of Entanglement Between Two Atoms in the Tavis-Cummings Model [J]. Chin. Phys. B, 2009, 18: 888 - 893.
- [18] ALMEIDA M P, DE-MELO F, HOR-MEYLL M. Environment-Induced Sudden Death of Entanglement [J]. Science, 2007, 316: 579 - 582.

- [19] LOPEZ C E, ROMERO G, LASTRA F, et al. Sudden Birth Versus Sudden Death of Entanglement in Multipartite Systems [J]. Phys. Rev. Lett., 2008, 101: 080 503.
- [20] BELLOMO B, FRANCO R L, COMPAGNO G. Entanglement Dynamics of Two Independent Qubits in Environments with and Without Memory [J]. Phys. Rev. A, 2008, 77: 032 342.
- [21] BENNET C H, BRASSARD G, CREPEAU C. Purification of Noisy Entanglement and Faithful Teleportation Via Noisy Channels [J]. Phys. Rev. Lett., 1993, 70: 1 895.
- [22] BREUER H P, PETRUCCIONE F. The Theory of Open Quantum System [M]. Oxford: Oxford University Press, 2002.
- [23] BELLOMO B, FRANCO R LO, COMPAGNO G. Non-Markovian Effects on the Dynamics of Entanglement [J]. Phys. Rev. Lett., 2007, 99: 160 502.
- [24] WILCZEWSKI M, CZACHOR M. Theory Versus Experiment for Vacuum Rabi Oscillations in Lossy Cavities [J]. Phys. Rev. A, 2009, 79: 033 836.
- [25] OSNAGHI S, BERTET P, AUFFEVE S, et al. Coherent Control of an Atomic Collision in a Cavity [J]. Phys. Rev. Lett., 2001, 87(3): 037 902 – 037 905.

Two-Photon Tavis-Cummings Model of Quantum Entanglement in Cavity Field in the Dissipative Condition

YI Jian, WU Yun-wen

(College of Physics Science and Information Engineering, Jishou University, Jishou 416000, China)

Abstract: This paper investigates quantum entanglement of two atoms in the non-dissipative and dissipative cases by means of concurrence. The results indicate that maximum entanglement condition can be prepared by controlling the interacting time and due to the two-photon transition of atoms, the time required to prepare the maximum entanglement in two-photon Tavis-Cummings model is of that in single-photon Tavis-Cummings model. In addition, the atomic spontaneous emission and cavity decay make the maximum coherence of two atoms decrease periodically.

Key words: two-photon Tavis-Cummings model; atomic coherence; concurrence; spontaneous emission coefficient; cavity decay

(责任编辑 陈炳权)