第32卷 第4期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 32 No. 4
2011年7月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) Jul. 2011

文章编号:1007-2985(2011)04-0001-03

广义完全正则半群的半格结构*

孔祥智,付世运
(江南大学理学院,江苏 无锡 214122)

摘 要:将Green关系进行了不对称的推广,利用该Green关系研究了广义的完全正则半群,证明了广义完全正则半群为完全 $\mathrm{J}^{*\sim}$-单半群的半格.

关键词:广义;完全正则半群;半格分解;同余;同态
中图分类号:O152.7 文献标志码:A

1 问题的提出与主要结果

Green关系在正则半群的研究中起着极其重要的作用[1-6].著名的Clifford定理告诉人们,正则半群为完全正则半群当且仅当它为完全单半群的半格[1],其中完全正则半群即为每个H-类都含幂等元的半群,也称为群并.利用该半格分解,众多学者获得了关于完全正则半群的丰富结果[3].文献[7]利用文献[8]中推广的Green关系,推广了Clifford定理,证明了富足半群为超富足半群(每个 H^*-类都含幂等元的富足半群)当且仅当它为完全 J^*-半群的半格.

首先回顾研究富足半群的推广的Green关系.下述$*$-Green关系首先在文献[8]中提出,而在文献[7]进行了深入研究.设 S 为半群,

$$\mathrm{L}^* = \{(a,b)\in S\times S:(\forall x,y\in S^1)ax=ay\Leftrightarrow bx=by\},$$
$$\mathrm{R}^* = \{(a,b)\in S\times S:(\forall x,y\in S^1)xa=ya\Leftrightarrow xb=yb\},$$
$$\mathrm{H}^* = \mathrm{L}^*\cap \mathrm{R}^*,\mathrm{D}^*=\mathrm{L}^*\vee \mathrm{R}^*,$$
$$\mathrm{J}^* = \{(a,b)\in S\times S:J^*(a)=J^*(b)\},$$

这里 $J^*(a)$ 是含 a 的被 L^* 和 R^* 浸透的最小理想.所谓浸透,也就是说 $J^*(a)$ 是一些 L^*-类,也是一些 R^*-类的并.文献[9]中在半群 S 上定义了 $\widetilde{\mathrm{R}}$:

$$a\widetilde{\mathrm{R}}b\Leftrightarrow(\forall e\in E(S))ea=a\leftrightarrow eb=b,$$

这里 $E(S)$ 是半群 S 的幂等元集.易证 $\mathrm{R}^*\subseteq\widetilde{\mathrm{R}}$ 且对正则元素 $a,b\in S$,$a\mathrm{R}b$ 当且仅当 $a\widetilde{\mathrm{R}}b$.

文中首先介绍利用$*$-Green关系与$\sim$-Green关系定义的$(*,\sim)$-Green关系,这套$(*,\sim)$-首先在文献[10]中提出,利用该广义Green关系,推广了完全正则半群的概念,引入了广义正则半群,并研究了它的半格分解,从而推广了完全正则半群与富足半群的半格分解结果.$(*,\sim)$-Green关系定义如下:

$$\mathrm{L}^{*,\sim}=\mathrm{L}^*,\mathrm{R}^{*,\sim}=\widetilde{R},$$
$$\mathrm{H}^{*,\sim}=\mathrm{L}^{*,\sim}\cap\mathrm{R}^{*,\sim},\mathrm{D}^{*,\sim}=\mathrm{L}^{*,\sim}\vee\mathrm{R}^{*,\sim},$$
$$\mathrm{J}^{*,\sim}=\{(a,b)\in S\times S:J^{*,\sim}(a)=J^{*,\sim}(b)\},$$

这里 $J^{*,\sim}(a)$ 是含元素 a 被 $\mathrm{L}^{*,\sim}$ 和 $\mathrm{R}^{*,\sim}$ 浸透的最小理想.易知 $\mathrm{L}^{*,\sim}$ 是右同余,而 $\mathrm{R}^{*,\sim}$ 仅是等价关系.容易证明每个 $\mathrm{H}^{*,\sim}$-类至多含1个幂等元.若 $e\in H_a^{*,\sim}\cap E(S)$,其中 $a\in S$,记 e 为 x^0,这里 $x\in H_a^{*,\sim}$ 为任意元素.显然,对 $\forall x\in H_a^{*,\sim}$,$a\in S$,有 $x=xx^0=x^0x$.

* 收稿日期:2011-04-13
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10871161)
作者简介:孔祥智(1971-),男,山东单县人,江南大学理学院教授,博士,主要从事半群代数理论研究.

若半群 S 是正则的,则每个 L-类至少包含 1 个幂等元,同样对 R-类也成立.若 S 是完全正则半群,则每个 H-类含 1 个幂等元,此时,每个 H-类为群.半群称为富足的[7],若每个 L^*-和 R^*-类含幂等元.易知对正则元有 $\mathrm{L}^*=\mathrm{L}$,从而正则半群都是富足半群.半群 S 称为超富足的[7],若每个 H^*-类都含幂等元,此时,每个 H^*-类为可消幺半群,它是完全正则半群在富足半群中的推广.半群称为 r-富足的,若每个 $\mathrm{L}^{*,\sim}$-类与每个 $\mathrm{R}^{*,\sim}$-类都含幂等元.当然富足半群是 r-富足的,但反之不然[10].称半群是 r-超富足的,若每个 $\mathrm{H}^{*,\sim}$-类含幂等元,此时,每个 $\mathrm{H}^{*,\sim}$-类是左消幺半群,这是完全正则半群与超富足半群在 r-富足半群中的推广.若 $\mathrm{H}^{*,\sim}$ 是同余,则称该半群为密码的.下文将证明如下主要结果:

定理 1 设 S 为密码 r-超富足半群,则 S 是完全 $\mathrm{J}^{*,\sim}$-单半群的半格,即 $S=(Y;S_\alpha)$,且对 $\alpha\in Y$ 与 $a\in S_\alpha$,$\mathrm{L}_a^{*,\sim}(S)=\mathrm{L}_a^{*,\sim}(S_\alpha)$,$\mathrm{R}_a^{*,\sim}(S)=\mathrm{R}_a^{*,\sim}(S_\alpha)$.

2 定理证明的铺垫

因完全单半群是 J-单的完全正则半群且 Green 关系 H 是同余,作为推广,称 r-超富足半群 S 是完全 $\mathrm{J}^{*,\sim}$-单半群,若它是 $\mathrm{J}^{*,\sim}$-单的且($*$,$\sim$)-Green 关系 $\mathrm{H}^{*,\sim}$ 是同余.

引理 1 设 S 是 r-超富足半群,则 $\mathrm{H}^{*,\sim}$ 是同余当且仅当对 $\forall a,b\in S$,$(ab)^0=(a^0b^0)^0$.

证明 必要性.对任意的 $a,b\in S$,有 $a\mathrm{H}^{*,\sim}a^0$ 与 $b\mathrm{H}^{*,\sim}b^0$.因 $\mathrm{H}^{*,\sim}$ 是同余,故有 $ab\mathrm{H}^{*,\sim}a^0b^0$.但 $ab\mathrm{H}^{*,\sim}(ab)^0$,由每个 $\mathrm{H}^{*,\sim}$-类含唯一的幂等元,有 $(ab)^0=(a^0b^0)^0$.

充分性.因 $\mathrm{H}^{*,\sim}$ 是等价关系,只需证明 $\mathrm{H}^{*,\sim}$ 是相容的.令 $(a,b)\in\mathrm{H}^{*,\sim}$,$c\in S$,那么 $(ca)^0=(c^0a^0)^0=(c^0b^0)^0=(cb)^0$,故 $\mathrm{H}^{*,\sim}$ 是左相容的.对称地,$\mathrm{H}^{*,\sim}$ 是右相容的,故 $\mathrm{H}^{*,\sim}$ 是同余.

引理 2 若幂等元 e,f 在 r-超富足半群 S 中符合 $\mathrm{D}^{*,\sim}$ 关系,则 $e\mathrm{D}f$.

证明 由 $e\mathrm{D}^{*,\sim}f$,则存在 S 中的元素 $a_1,\cdots,a_k$ 使得 $e\mathrm{L}^{*,\sim}a_1\mathrm{R}^{*,\sim}a_2\cdots a_k\mathrm{L}^{*,\sim}f$.由 S 是 r-超富足的,有 $e\mathrm{L}^{*,\sim}a_1{}^0\mathrm{R}^{*,\sim}a_2{}^0\cdots a_k{}^0\mathrm{R}^{*,\sim}f$.这样由对正则元有 $\mathrm{R}=\mathrm{R}^*=\widetilde{\mathrm{R}}$,$\mathrm{L}=\mathrm{L}^*$,得到 $e\mathrm{D}f$.

推论 1 设 S 是 r-超富足半群,则 $\mathrm{D}^{*,\sim}=\mathrm{L}^{*,\sim}\circ\mathrm{R}^{*,\sim}=\mathrm{R}^{*,\sim}\circ\mathrm{L}^{*,\sim}$.

证明 若 $a,b\in S$,$a\mathrm{D}^{*,\sim}b$,由引理 2,$a^0\mathrm{D}b^0$,从而存在元素 $c,d\in S$ 满足 $a^0\mathrm{L}c\mathrm{R}b^0$,$a^0\mathrm{R}d\mathrm{L}b^0$,故 $a\mathrm{L}^{*,\sim}c\mathrm{R}^{*,\sim}b$,$a\mathrm{R}^{*,\sim}d\mathrm{L}^{*,\sim}b$,结论得证.

引理 3 设 e,f 为 r-超富足半群 S 的幂等元.若 $e\mathrm{J}f$,则 $e\mathrm{D}f$.

证明 由 $SeS=SfS$,存在元素 x,y,s,t 使得 $f=set$,$e=xfy$.记 $h=(fy)^0$,$k=(se)^0$,则 $hfy=fy=ffy$,从而 $h=h^2=fh$,$sek=se=see$,这样 $k=k^2=ke$.进而 hf,ek 是幂等元且 $hf\mathrm{R}h$,$ek\mathrm{L}k$,故 $ehf\mathrm{R}eh$,$ekf\mathrm{L}kf$.从而有 $eh=xfyh=xfy=e$,$kf=kset=set=f$,故 $e\mathrm{R}ef\mathrm{L}f$,即 $e\mathrm{D}f$.

命题 1 若 a 为 r-超富足半群 S 的元素,则 $J^{*,\sim}(a)=Sa^0S$.

证明 由 $a^0\in J^{*,\sim}(a)$,有 $Sa^0S\subseteq J^{*,\sim}(a)$.只需证明理想 Sa^0S 是被 $\mathrm{L}^{*,\sim}$ 与 $\mathrm{R}^{*,\sim}$ 浸透的,又 $a=aa^0\in Sa^0S$,这样结论即得证.令 $b=xa^0y\in Sa^0S(x,y\in S)$,$k=(a^0y)^0$,那么 $a^0a^0y=ka^0y$,故 $a^0(a^0y)^0=k^2=k$.由 $\mathrm{H}^{*,\sim}$ 是同余,$xa^0y\mathrm{H}^{*,\sim}xk$.记 $h=(xk)^0=(xa^0y)^0$,那么 $xkh=xkk$,故 $h=h^2=hk=ha^0k\in Sa^0S$.若 $c\in L_b^{*,\sim}$,$d\in R_b^{*,\sim}$,则 $c=ch$,$d=hd\in Sa^0S$,故 Sa^0S 是被 $\mathrm{L}^{*,\sim}$ 与 $\mathrm{R}^{*,\sim}$ 浸透的理想.

命题 2 设 S 为完全 $\mathrm{J}^{*,\sim}$-单半群,则 $\mathrm{J}^{*,\sim}=\mathrm{D}^{*,\sim}$.

证明 令 $a,b\in S$,$a\mathrm{J}^{*,\sim}b$.由命题 1,$Sa^0S=Sb^0S$.再由引理 3,$a^0\mathrm{D}b^0$,从而 $a\mathrm{H}^{*,\sim}a^0\mathrm{D}b^0\mathrm{H}^{*,\sim}b$,这意味着 $a\mathrm{D}^{*,\sim}b$,故 $\mathrm{J}^{*,\sim}\subseteq\mathrm{D}^{*,\sim}$.反之,令 $a,b\in S$,$a\mathrm{D}^{*,\sim}b$.由推论 1,存在 $c\in S$ 使得 $a\mathrm{L}^{*,\sim}c\mathrm{R}^{*,\sim}b$.这样 $a^0\mathrm{L}c^0\mathrm{R}b^0$,故 $Sa^0S=Sc^0S=Sb^0S$.由命题 1,$(a,b)\in\mathrm{J}^{*,\sim}$,故 $\mathrm{D}^{*,\sim}\subseteq\mathrm{J}^{*,\sim}$.这样证明了 $\mathrm{J}^{*,\sim}=\mathrm{D}^{*,\sim}$.

命题 3 完全 $\mathrm{J}^{*,\sim}$-单半群 S 的幂等元是本原的.

证明 令 e,f 为 S 的幂等元且 $e\leqslant f$.由 S 是完全 $\mathrm{J}^{*,\sim}$-单的及命题 1,$f\in SeS$.从文献[1]§8.4 的练习 3 的第 1 部分,存在幂等元 g 满足 $f\mathrm{D}g$,且 $g\leqslant e$.设 $a\in S$,$f\mathrm{L}a\mathrm{R}g$,那么 $f\mathrm{L}a^0\mathrm{R}g$.由 $g\leqslant f$,有 $a^0=ga^0(gf)a^0=g(fa^0)=gf=g$.从而 $g\leqslant f$,$g\mathrm{L}f$,故 $f=fg=g$.但 $g\leqslant e$,故 $e=f$,即所有幂等元是本原的.

引理 4 设 S 为完全 $\mathrm{J}^{*,\sim}$-单半群,则 S 的正则元集生成完全单半群.

证明 设 a,b 为 S 的正则元.因 S 由单一的 $\mathrm{D}^{*,\sim}$-类组成(见命题 2),再由推论 1,存在 $c\in S$ 满足

$a\mathrm{L}^{*,\sim}c\mathrm{R}^{*,\sim}b$，从而有 $a\mathrm{L}^{*,\sim}c^0\mathrm{R}^{*,\sim}b$. 这样由 a 的正则性，$c^0b=b$，$a\mathrm{L}c^0$. 故 $ab\mathrm{L}b$，从而 ab 为正则元. 由命题 2、引理 2 和推论 1，易见正则元集生成完全单半群.

3　定理 1 的证明

令 $a\in S$，那么 $a\mathrm{H}^{*,\sim}a^2$，故由命题 1，$J^{*,\sim}(a)=J^{*,\sim}(a^2)$. 从而对 $a,b\in S$，$(ab)^2\in SbaS$，有 $J^{*,\sim}(ab)=J^{*,\sim}((ab)^2)\subseteq J^{*,\sim}(ba)$. 由对称性，$J^{*,\sim}(ab)=J^{*,\sim}(ba)$. 由命题 1，$J^{*,\sim}(a)=Sa^0S$，$J^{*,\sim}(b)=Sb^0S$，故若 $c\in J^{*,\sim}(a)\cap J^{*,\sim}(b)$，则有 $c=xa^0y=zb^0t$，其中 $x,y,z,t\in S$. 这样 $c^2=zb^0txa^0y\in Sb^0txa^0S\subseteq J^{*,\sim}(b^0txa^0)$，$J^{*,\sim}(b^0txa^0)=J^{*,\sim}(a^0b^0tx)$. 故由 $c\mathrm{H}^{*,\sim}c^2$，$c^2\in J^{*,\sim}(a^0b^0)$，还有 $c\in J^{*,\sim}(a^0b^0)$. 因 $a\mathrm{H}^{*,\sim}a^0$，$b\mathrm{H}^{*,\sim}b^0$ 及 $\mathrm{H}^{*,\sim}$ 是同余，故 $ab\mathrm{H}^{*,\sim}a^0b^0$. 这样 $c\in \mathrm{H}^{*,\sim}(ab)$. 进而 $J^{*,\sim}(a)\cap J^{*,\sim}(b)\subseteq J^{*,\sim}(ab)$，因反包含是显然的，得到 $J^{*,\sim}(a)\cap J^{*,\sim}(b)=J^{*,\sim}(ab)$.

已证明理想 $J^{*,\sim}(a)(a\in S)$ 的集合 Y 在交运算下是半格，同时映射 $a\mapsto J^{*,\sim}(a)$ 是从 S 到 Y 的同态映射. 原像集 $J^{*,\sim}(a)$ 正好是 $\mathrm{J}^{*,\sim}$ -类 $J_a^{*,\sim}$，它也为半群 S 的子半群，因此 S 是半群 $J_a^{*,\sim}$ 的半格 Y.

现令 a,b 为 $\mathrm{J}^{*,\sim}$ -类 $J^{*,\sim}$ 的元素且 $(a,b)\in \mathrm{L}^{*,\sim}(J^{*,\sim})$. 当然 $a^0,b^0\in J^{*,\sim}$，故有 $(a^0,b^0)\in \mathrm{L}^{*,\sim}(J^{*,\sim})$，即 $a^0b^0=a^0$，$b^0a^0=b^0$，$(a^0,b^0)\in \mathrm{L}^{*,\sim}(S)$. 从而 $(a,b)\in \mathrm{L}^{*,\sim}(S)$，因此由 $L_a^{*,\sim}(S)\subseteq J^{*,\sim}$，有 $L_a^{*,\sim}(S)=L_a^{*,\sim}(J^{*,\sim})$. 类似地讨论得 $R_a^{*,\sim}(S)=R_a^{*,\sim}(J^{*,\sim})$.

由上面证明有 $H_a^{*,\sim}(J^{*,\sim})=H_a^{*,\sim}(S)$，从而 $J^{*,\sim}$ 是 r -超富足的. 进而，若 $a,b\in J^{*,\sim}$，由命题 2，$(a,b)\in \mathrm{D}^{*,\sim}(S)$，由推论 1，存在 $c\in L_a^{*,\sim}(S)\cap R_b^{*,\sim}(S)=L_a^{*,\sim}(J^{*,\sim})\cap R_b^{*,\sim}(J^{*,\sim})$. 这样，$a,b$ 是在 $J^{*,\sim}$ 中符合 $D^{*,\sim}$ 关系，故 $J^{*,\sim}$ 是 $\mathrm{J}^{*,\sim}$ -单的.

参考文献：

[1] CLIFFORD A H，PRESTON G B. The Algebraic Theory of Semigroups [M]. New York：American Mathematical Society，Providence，R. I.，1967：98－120.

[2] HOWIE J M. Fundamental of Semigroup Theory [M]. Oxford：Clarendon Press，1995：56－73.

[3] PETRICH M，REILLY N R. Completely Regular Semigroups [M]. New York：John Wiley Sons，1999：162－197.

[4] CLIFFORD A H. Semigroups Admitting Relative Inverses [J]. Ann. of Math.，1941，42：1 037－1 049.

[5] PETRICH M. The Structure of Completely Regular Semigroups [J]. Trans. Amer. Math. Soc.，1974，189：211－236.

[6] PETRICH M. Lectures in Semigroups [M]. London：Wiley Sons Inc.，1976：124－156.

[7] FOUNTAIN J B. Abundant Semigroups [J]. Proc. London Math. Soc.，1982，43(3)：103－129.

[8] PASTIJN F. A Representation of a Semigroup by a Semigroup of Matrices Over a Group with Zero [J]. Semigroup Forum，1975，10：238－249.

[9] LAWSON M V. Rees Matrix Semigroups [J]. Proc. of the Edinburgh Math. Soc.，1990，33：23－39.

[10] GUO Y Q，SHUM KP，GONG C M. On (*，～)-Green's Relations and Ortho-lc-Monoids [J]. Comm. Alg.，2011，39(1)：5－31.

Semilattice Structure of Generalized Completely Regular Semigroups

KONG Xiang-zhi，FU Shi-yun

(School of Science，Jiangnan University，Wuxi 214122，Jiangsu China)

Abstract：The Green ralations are generalized in the unsymmetric form，and generalized completely regular semigroups are studied by the generalized Green relations. It is proved that generalized completely regular semigroups are semilattice of completely $\mathrm{J}^{*,\sim}$-simple semigroups.

Key words：generalized；completely regular semigroups；semilattice decomposition；congruence；homomorphism

（责任编辑　向阳洁）