第 32 卷　第 5 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 32　No. 5
2011 年 9 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Sept. 2011

文章编号:1007-2985(2011)05-0022-04

一类 4 阶非线性自治系统的稳定性*

秦宏立,付　华

(延安大学数学与计算机科学学院,陕西 延安　716000)

摘　要:采用“类比法”讨论了一类非线性系统的 Lyapunuov 函数的构造,给出了具有 3 个非线性项的 4 阶系统平凡解稳定的充分条件.

关键词:非线性系统;Lyapunuov 函数;稳定性;充分条件

中图分类号:O175.13　　　　文献标志码:A

1　问题的提出

如所周知,Lyapunuov 函数的构造是李亚普诺夫直接方法的核心问题. 长期以来,众多学者在 Lyapunuov 函数的构造研究方面做了大量的工作,同时也取得了一定的成就. 文献[1]采用类比方法构造了多种 Lyapunuov 函数,并研究了 3 阶非线性系统平凡解的稳定性问题;文献[2-5]通过计算给出了常系数 4 阶线性微分方程 $x^{(4)}+ax'''+bx''+cx'+dx=0$ 的 Lyapunuov 函数,运用类比方法构造了具有一个非线性项的 4 阶非线性方程 $x^{(4)}+ax'''+bx''+f(x')+dx=0$ 的 Lyapunuov 函数,从而解决了此类系统平凡解稳定性的问题;文献[6]通过构造 Lyapunuov 函数讨论了具有 2 个非线性项的 4 阶非线性方程 $x^{(4)}+ax'''+bx''+f(x')+gx=0$ 零解的稳定性;文献[7]则通过研究方程的系数矩阵及其特征值的方法来判定非线性系统的稳定性.

笔者在文献[6]的基础上,运用类比法通过构造 Lyapunuov 函数,考察具有 3 个非线性项的 4 阶自治微分方程

$$x^{(4)}+ax'''+f(x'')+g(x')+hx=0$$

平凡解的稳定性问题,并给出了此类方程稳定的充分性条件,从而推广了相应文献的已有结果.

2　预备知识

定义 1[7]　设 $\Omega\in R^n$,Ω 是包含原点的 n 维子集,$I=[0,+\infty)$;$W\in C[W,R]$,$W(\mathbf{0})=0$;$V\in C[I\times\Omega,R]$,$V(t,\mathbf{0})\equiv 0$,称 W 和 V 为 Lyapunuov 函数.

定义 2[8]　设 $V(x)$ 在 R^n 中包含原点的某邻域 U 中连续可微,且满足 $V(0)=0$. 若除原点外对所有 $x\in U$,均有 $V(x)>0(V(x)<0)$,则称 $V(x)$ 为正定函数(负定函数);若对所有 $x\in U$,均有 $V(x)\geqslant 0(v(x)\leqslant 0)$,则称 $V(x)$ 为半正定函数(半负定函数);若在 U 中包含原点的任一邻域内 $V(x)$ 既可取正值,也可取负值,则称 $V(x)$ 为变号函数.

定义 3[8]　设非线性系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{f}(t,0)=0 \tag{1}$$

的解为 $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x(t)_2,\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$,则称

* 收稿日期:2011-06-15
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10271093);陕西省教育厅专项科研计划项目(10JK430)
作者简介:秦宏立(1954-),男,陕西富县人,延安大学数学与计算机科学学院教授,主要从事微分方程稳定性与振动性研究.

$$V'(t,\boldsymbol{x})=\frac{\mathrm{d}V(t,\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$$

为函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 沿着系统(1) 轨线的全导数.

定义 4[8]　在系统(1) 中,若 $f(t,\boldsymbol{x})$ 不显含 t,即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{f}(0)=0, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$,则称该系统为自治系统.

引理 1[7]　系统(1) 的平凡解稳定的充分条件是,在某区域 $G_a:=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|\leqslant a\}$ 上存在正定函数 $V(t,\boldsymbol{x})$,使得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(1)}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(t,x)\leqslant 0.$$

3　主要结果

首先,考虑 4 阶常系数线性方程

$$x^{(4)}+ax'''+bx''+cx'+dx=0, \tag{3}$$

其中 $a>0,c>0,d>0,b$ 均为常数. 若令 $x=x_1,x'=x_2,x''=x_3,x'''=x_4$,则方程(3) 可化为下列系统:

$$\begin{cases}x_1'=x_2,\\x_2'=x_3,\\x_3'=x_4,\\x_4'=-dx_1-cx_2-bx_3-ax_4.\end{cases} \tag{4}$$

由文献[3] 可得到系统(4) 的 Lyapunuov 函数为

$$\begin{aligned}V(x_1,x_2,x_3,x_4)=&c((ab-c)x_2+a^2x_3+ax_4)^2+a(adx_1+acx_2+cx_3)^2+\\&c(abc-c^2-a^2d)x_2^2+ad(abc-c^2-a^2d)x_1^2.\end{aligned}$$

由于 a,c,d 均大于 0,且 $ab-c>0,abc-c^2-a^2d>0$,因此函数 $V(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 沿着系统(2) 轨线的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\Big|_{(5)}=-2(abc-c^2-a^2d)x_2^2\leqslant 0.$$

于是,据引理 1 知系统(4) 的平凡解稳定.

其次,考虑具有 3 个非线性的 4 阶自治方程

$$x^{(4)}+ax'''+f(x'')+g(x')+h(x)=0,f(0)=g(0)=h(0)=0. \tag{5}$$

同样,$x=x_1,x'=x_2,x''=x_3,x'''=x_4$,将方程(5) 化为下列系统:

$$\begin{cases}x_1'=x_2,\\x_2'=x_3,\\x_3'=x_4,\\x_4'=-h(x_1)-g(x_2)-f(x_3)-ax_4.\end{cases} \tag{6}$$

此时,采用类比法作系统(6) 的 Lyapunuov 函数. 只需将 $h(x_1),h'(x_1),g(x_2),g'(x_2),f(x_3),f'(x_3)$ 分别代替 dx_1,d,cx_2,c,bx_3,b,便有

$$\begin{aligned}V_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=&g'(x_2)(af'(x_3)x_2-g(x_2)+a^2x_3+ax_4)^2+a(ah(x_1)+ag(x_2)+g'(x_2)x_3)^2+\\&(af'(x_3)g'(x_2)-g'^2(x_2)-a^2h'(x_1))(2\int_0^{x_2}g'(\eta)\mathrm{d}\eta+2a\int_0^{x_1}h'(\eta)\eta\mathrm{d}\eta).\end{aligned} \tag{7}$$

而 $V_1(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 沿着系统(6) 的全导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}x}\Big|_{(4)}=&g''(x_2)x_3(af'(x_3)x_2-g(x_2)+a^2x_3+ax_4)^2+2g'(x_2)(af'(x_3)x_2-g(x_2)+a^2x_3+ax_4)\cdot\\&(af'(x_3)x_2-g(x_2)+a^2x_3+ax_4)'+2a(ah(x_1)+ag(x_2)+g'(x_2)x_3)(ah(x_1)+\\&ag(x_2)+g'(x_2)x_3)'+(af'(x_3)g'(x_2)-g'^2(x_2)-a^2h'(x_1))'2\int_0^{x_2}g'(\eta)\eta d\eta+\end{aligned}$$

$$2a\int_0^{x_1}h'(\eta)\eta\mathrm{d}\eta)+(af'(x_3)g'(x_2)-g'^2(x_2)-a^2h'(x_1))\cdot$$
$$(2g'(x_2)x_3x_2+2ah'(x_1)x_1x_2).$$

由此,可得下面的结果:

定理 1 对于 $a>0$,若在域 $G_a:=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|\leqslant a\}$ 内函数 $f(x),g(x),h(x)$ 有界、具有连续的 2 阶导数,且存在大于 0 的数 k,l,m,n,满足以下条件,则在域 G_a 内非线性自治系统(6)的平凡解是稳定的:

(ⅰ) $f'(x_3)>0,0<g'(x_2)\leqslant Q,h'(x_1)\geqslant 0$(其中 Q 为一固定正数);

(ⅱ) $|g''(x_2)|\leqslant k\sigma$,$|h''(x_1)|\leqslant l\sigma$,$|f''(x_3)|\leqslant n\sigma$(其中 σ 为任意小正数);

(ⅲ) $0<af'(x_3)g'(x_2)-g'^2(x_2)-a^2h'(x_1)\leqslant\dfrac{\sigma}{a^2}$;

(ⅳ) $|f'(x_3)x_3-f(x_3)|\leqslant r\sigma$;

(ⅴ) $|g(x_2)-g'(x_2)x_2|\leqslant m\sigma$.

证明 在域 G_a 内作非线性自治系统(6)的 Lyapunuov 函数(7)式.由于

$$a>0,g'(x_2)>0,h'(x_1)\geqslant 0,f'(x_3)\geqslant 0,$$
$$0<af'(x_3)g'(x_2)-g'^2(x_2)-a^2h'(x_1)\leqslant\frac{\sigma}{a^2},\ |f'(x_3)x_3-f(x_3)|\leqslant r\sigma,$$
$$\int_0^{x_2}g'(\eta)\eta\mathrm{d}\eta=\frac{1}{2}f'(\xi_1)x_2^2\geqslant 0,\int_0^{x_1}h'(\eta)\eta\mathrm{d}\eta=\frac{1}{2}g'(\xi_2)x_1^2\geqslant 0,$$

这里 ξ_1 介于 0 到 x_2 之间,ξ_2 介于 0 到 x_1 之间,因此根据表达式(7)知,函数 $V(x_1,x_2,x_3,x_4)>0$,即正定.

由 $f(x),g(x),h(x)$ 有界,而

$$|X|\leqslant a,\ |g''(x_2)\leqslant k\sigma,\ |h''(x_1)\leqslant l\sigma,\ |f''(x_3)\leqslant n\sigma,$$
$$0<af'(x_3)g'(x_2)-g'^2(x_2)-a^2h'(x_1)\leqslant\frac{\sigma}{a^2},\ |g(x_2)-g'(x_2)x_2|\leqslant m\sigma,$$

若令

$$M=(af'(x_3)x_2-g(x_2)+a^2x_3+ax_4)^2,N=2\int_0^{x_2}g'(\eta)\eta\mathrm{d}\eta+2a\int_0^{x_1}h'(\eta)\eta\mathrm{d}\eta,$$
$$P=|ah(x_1)+ag(x_2)+g'(x_2)x_3|,R=|2g'(x_2)(af'(x_3)x_2-g(x_2)+a^2x_3+ax_4)|,$$

则易知 M,N,P,R 均有界,从而有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}x_1}\Big|_{(4)}={}&g''(x_2)x_3(af'(x_3)x_2-g(x_2)+a^2x_3+ax_4)^2+2(ah(x_1)+ag(x_2)+g'(x_2)x_3)\cdot\\&(a^2h'(x_1)x_2+ag''(x_2)x_3^2+(g(x_2)-af'(x_3)x_2)g'(x_2))+(af'(x_3)g'(x_2)-\\&g'^2(x_2)-a^2h'(x_1))(2g'(x_2)x_3x_2+2ah'(x_1)x_1x_2)+(af'(x_3)g'(x_2)x_4+\\&af'(x_3)g''(x_2)x_3-2g'(x_2)g''(x_2)x_3-a^2h''(x_1)x_2)(2\int_0^{x_2}g'(\eta)\eta\mathrm{d}\eta+2a\int_0^{x_1}h'(\eta)\eta\mathrm{d}\eta)+\\&2g'(x_2)(af'(x_3)x_2-g(x_2)+a^2x_3+ax_4)(af''(x_3)(x_4x_2+af'(x_3)x_3-af(x_3)))\leqslant\\&|g''(x_2)||x_3|(af'(x_3)x_2-g(x_2)+a^2x_3+ax_4)^2+2|ah(x_1)+ag(x_2)+\\&g'(x_2)x_3||a^2h'(x_1)x_2+ag''(x_2)x_3^2+(g(x_2)-af'(x_3)x_2)g'(x_2)|+\\&(af'(x_3)g'(x_2)-g'^2(x_2)-a^2h'(x_1))(2g'(x_2)|x_3||x_2|+\\&2ah'(x_1)|x_2||x_1|)+(a|f''(x_3)|g'(x_2)|x_4|+af'(x_3)|g''(x_2)||x_3|+\\&2g'(x_2)|g''(x_2)||x_3|+a^2|h''(x_1)||x_2|)(2\int_0^{x_2}g'(\eta)\eta\mathrm{d}\eta+2a\int_0^{x_1}h'(\eta)\eta\mathrm{d}\eta)+\\&|2g'(x_2)(af'(x_3)x_2-g(x_2)+a^2x_3+ax_4)|(|af''(x_3)x_4x_2|+\\&|af'(x_3)x_3-af(x_3)|)\leqslant k\sigma aM+2P|a^2h'(x_1)x_2+ag''(x_2)x_3^2+(g(x_2)-\\&af'(x_3)x_2)g'(x_2)|+(2g'(x_2)+2ah'(x_1))\sigma+\\&(a^2n\sigma g'(x_2)+a^2f'(x_3)k\sigma+2ak\sigma g'(x_2)+a^3l\sigma)N+R(a^2+r)\sigma<\end{aligned}$$

$$k\sigma aM+(2g'(x_2)+2ah'(x_1))\sigma+(a^2ng'(x_2)+a^2f'(x_3)k+2akg'(x_2)+a^3l)N\sigma+$$
$$2p\mid a\mid g''(x_2)\mid x_3\mid^2+(g(x_2)g'(x_2)-g'^2(x_2)x_2)\mid+R(a^2+r)\sigma\leqslant$$
$$k\sigma aM+(2g'(x_2)+2ah'(x_1))\sigma+(a^2ng'(x_2)+a^2f'(x_3)k+2akg'(x_2)+a^3l)N\sigma+$$
$$2P\mid a\mid g''(x_2)\mid\mid x_3\mid^2+g'(x_2)\mid(g(x_2)-g'(x_2)x_2)\mid\mid+R(a^2+r)\sigma\leqslant$$
$$(kaM+2g'(x_2)+2ah'(x_2)+(a^2ng'(x_2)+a^2f'(x_3)k+2akg'(x_2)+a^3l)N)\sigma+$$
$$2Pa^3k\sigma+2Pg'(x_2)\mid(g(x_2)-g'(x_2)x_2)\mid+R(a^2+r)\sigma\leqslant$$
$$(kaM+2g'(x_2)+2ah'(x_1)+(a^2ng'(x_2)+a^2f'(x_3)k+2ahg'(x_2)+a^3l)N+$$
$$2Pa^3k\sigma+2Pg'(x_2)m+R(a^2+r))\sigma,$$

于是，$\frac{dV_1}{dx}\mid_{(4)}\leqslant 0$.

所以，据引理 1 知系统(7) 的平凡解是稳定的，故方程(6) 的平凡解是稳定的.

4　算例

例 1　讨论系统

$$\begin{cases} x_1{}'=x_2, \\ x_2{}'=x_3, \\ x_3{}'=x_4, \\ x_4{}'=\frac{1}{2}\sigma x_1^2-x_1-\sigma x_2^2-x_2-\frac{1}{2}\sigma x_3^2-2x_3-ax_4 \end{cases} \tag{8}$$

的稳定性.

解　当 $a=1$ 时，分别令 $h(x_1)=-\frac{1}{2}\sigma x_1^2+x_1$，$g(x_2)=\sigma x_2^2+x_2$，$f(x_3)=\frac{1}{2}\sigma x_3^2+2x_3$，则它们的 1 阶和 2 阶导数分别为：

$$h'(x_1)=-\sigma x_1+1,\ g'(x_2)=2\sigma x_2+1,\ f'(x_3)=\sigma x_3+2;$$
$$h''(x_1)=-\sigma,\ g''(x_2)=2\sigma,\ f''(x_3)=\sigma.$$

易知它们满足定理 1 的前 2 个条件. 又因为

$$0<af'(x_3)g'(x_2)-g'^2(x_2)-a^2h'(x_1)=4\sigma^2x_2x_3+2\sigma x_3-4\sigma^2x_2^2+\sigma x_1<\sigma,$$

而 $\mid f'(x_3)x_3-f(x_3)\mid<\frac{1}{2}$，同样可以得到 $\mid g(x_2)-g'(x_2)x_2\mid\leqslant 2\sigma$. 那么，相对于系统(6) 满足定理 1 的 5 个条件，从而可知系统(8) 的平凡解是稳定的.

参考文献：

[1]　王　联，王慕秋. 非线性常微分方程稳定性分析[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1987.
[2]　梁在中. 关于一类 4 阶非线性系统李雅普诺夫函数构造的研究[J]. 应用数学和力学，1995，16(2)：181-188.
[3]　高　峰. 一类 4 阶非线性微分方程稳定性之分析[J]. 河南城建高专学报，1994，11(1/2)：1-2.
[4]　李玉洁. 一类 4 阶非线性系统的稳定性[J]. 安庆师范学院学报：自然科学版，2005，11(7)：14-15.
[5]　徐　静，李玉洁. 一类 4 阶非线性系统的稳定性[J]. 工科数学，2001，17(1)：47-49.
[6]　邢敦菊，王广瓦，沈　磊. 一类具有两个非线性项的 4 阶非线性系统的稳定性[J]. 大学数学，2009，25(2)：109-113.
[7]　廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用[M]. 武汉：华中师范大学出版社，1988.
[8]　尤晓琳. Lyapunov 稳定性理论基本定理的两个应用[J]. 河南教育学院学报：自然科学版，2008，17(2)：13-15.

Stability of A Class of Fourth Order Nonlinear Autonomous System

QIN Hong-li，FU Hua

(College of Mathematics and Computer Science，Yan'an University，Yan'an 716000，Shaanxi China)

Abstract：Using "analogy method" is used to discuss the constructure of Lyapunuov function，a class of nonlinear system. A sufficient condition is obtained for the stability of the ordinary solution to the three-nonlinear fourth order system.

Key words：nonlinear system；Lyapunuov functions；stability；sufficient conditions　　(责任编辑　向阳洁)