第 32 卷 第 5 期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 32 No. 5
2011 年 9 月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) Sept. 2011

文章编号:1007-2985(2011)05-0011-05

恰有 7 个极大子群的有限群*

游兴中,刘 峥,朱伟华

(长沙理工大学数学与计算科学学院,湖南 长沙 410004)

摘 要:研究了有限群的极大子群的个数对群结构的影响,刻画了恰有 7 个极大子群的有限群的结构.

关键词:有限群;极大子群;共轭

中图分类号:O152.1 **文献标志码:**A

极大子群是有限群的一类重要的子群,在有限群结构的研究中起重要的作用,有限群的极大子群的数量性质能够反映该群的许多性质.如文献[1-2]证明了极大子群共轭类类数为 2 的有限群必可解,文献[3-5]研究了极大子群同阶类类数对有限群结构的影响,文献[6]刻画了极大子群的个数小于 5 的有限群的结构,文献[7-8]分别对恰有 5 和 6 个极大子群的有限群的结构给出了刻画.笔者继续文献[7-8]的工作,刻画恰有 7 个极大子群的有限群的结构.

1 相关定义与引理

若 M 是有限群 G 的极大子群,则 $\{M^g \mid g \in G\}$ 为 M 在 G 中的一个共轭类,也称为含 M 的一个轨道,其轨道长为 $|G:N_G(M)|$.文中其他未加说明的术语和记号都是标准的(参见文献[9]).

引理 1[7] 设 G 是有限群且 $N \lhd G$,$\Phi(G)$ 为 G 的 Frattini 子群,S 为 G 的所有极大子群的集合,$\bar{S}$ 为 G/N 的所有极大子群的集合,则:

(ⅰ) $\bar{S} = \{M/N \mid M \in S$ 且 $MN < G\}$;

(ⅱ) M 是 G 的极大子群当且仅当 $M/\Phi(G)$ 为 $G/\Phi(G)$ 的极大子群;

(ⅲ) M_1 和 M_2 是 G 的不同的极大子群,当且仅当 $M_1/\Phi(G)$ 和 $M_2/\Phi(G)$ 为 $G/\Phi(G)$ 的不同的极大子群.

引理 2[7] 若 M 是有限群 G 的极大子群,则 $M \lhd G$ 或 $N_G(M) = M$ 且 $|G:N_G(M)| \geqslant 3$.

引理 3[10] 设 G 是有限群,N 为 G 的正规交换子群.若 $N \cap \Phi(G) = 1$,则 N 在 G 中有补,即存在 $A \leqslant G$ 使得 $G = AN$ 且 $A \cap N = 1$.

引理 4[7] 设 G 是有限群,N 为 G 的交换的极小正规子群.若 $\Phi(G) = 1$,则 N 在 G 中有补,即 $G = MN$ 且 $M \cap N = 1$ 对某个 $M \leqslant G$.进一步,若 $N \not\leqslant Z(G)$,则 M 是 G 的非正规的极大子群.

引理 5 若 G 是非幂零的有限可解群且 $\Phi(G) = 1$,则 $G = (U_1 \times \cdots \times U_s \times Z(G))A$,其中 $F(G) = U_1 \times \cdots \times U_s \times Z(G)$ 为 G 的 Fitting 子群,A 为 $F(G)$ 在 G 中的补,$U_i(1 \leqslant i \leqslant s)$ 为 G 的极小正规子群且 U_i 在 G 中有补 M_i 为 G 的非正规的极大子群,其轨道长为 $|U_i|(\geqslant 3)$.

证明 因为 G 可解且 $\Phi(G) = 1$,所以 G 的极小正规子群为初等交换群,且 $F(G)$ 是 G 的极小正规子群的积,从而 $F(G)$ 是交换群.由引理 3,$F(G)$ 在 G 中有补 A,即 $G = F(G)A$ 且 $F(G) \cap A = 1$.令 $F(G) = U \times Z(G)$,其中 $U \cap Z(G) = 1$.显然 U 是 G 的极小正规子群的直积,于是令 $U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_s$,其中 U_i(1

* **收稿日期:**2011-05-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671026,10871205);湖南省科技计划研究项目(2010FJ4136);湖南省教育厅资助科研项目(10A002)

作者简介:游兴中(1968-),男,湖南桃源人,长沙理工大学数学与计算科学学院教授,博士,主要从事群论研究.

$\leqslant i \leqslant s$)是G的交换的极小正规子群.注意到若K是G的2阶的正规子群,则必有$K \leqslant Z(G)$,因此$|U_i| \geqslant 3(1 \leqslant i \leqslant s)$.由引理4,$U_i$在$G$中有补$M_i$为$G$的非正规的极大子群,因此其轨道长为$|G:N_G(M_i)|=|G:M_i|=|U_i|$.

引理6[6] 设G是有限群,则:

(ⅰ)若G的所有极大子群共轭,则G为素数幂阶循环群,特别地,G有唯一极大子群;

(ⅱ)G恰有2个极大子群当且仅当G为2个不同的素数幂阶循环群的直积;

(ⅲ)G恰有3个极大子群当且仅当G为2元生成的2-群或者为3个阶为不同素数幂的循环群的直积;

(ⅳ)G恰有4个极大子群当且仅当下列情形之一成立:(a)G为2元生成的3-群;(b)G为4个阶为不同素数幂的循环群的直积;(c)$G=\langle x,y \mid x^{2^n}=y^{3^m}=1, y^x=y^k\rangle$,其中$k^2 \equiv 1 \pmod{3^m}$,$k=3s+2$,$s,n,m,k$为正整数;(d)$G$为一个2元生成的2-群与一个奇素数幂阶循环群的直积.

引理7[7] 若G是非幂零的有限可解群且$\Phi(G)=1$,则G恰有5个极大子群当且仅当$G \cong A_4$或$S_3 \times Z_p$,其中p为奇素数.

引理8[8] 若G是非幂零的有限可解群且$\Phi(G)=1$,则G恰有6个极大子群当且仅当G同构于下列情形之一的群:(ⅰ)D_{10};(ⅱ)$[Z_5]Z_4=\langle a,b,c \mid a^5=b^4=1, b^{-1}ab=a^3\rangle$;(ⅲ)$A_4 \times Z_p$,其中$p$为异于3的素数;(ⅳ)$S_3 \times Z_2$;(ⅴ)$S_3 \times Z_p \times Z_q$,其中$p \neq q$为奇素数.

引理9 不存在有限群G使得G恰有1个正规极大子群和2个轨道长均为3的非正规极大子群的共轭类.

证明 反设G是引理9中满足要求的群.由引理1,可以假定$\Phi(G)=1$.下面将导出矛盾.

首先证明G可解.令$P \in \mathrm{Syl}_3(G)$,M为G的任一极大子群.若M不在G中正规,则$|G:M|=3$,因此$N_G(P) \not\leqslant M$;若M在G中正规且$N_G(P) \not\leqslant M$,则$N_G(M)=M$,与M在G中正规矛盾.这样必有$N_G(P)=G$,即$P \trianglelefteq G$,于是P含于G的唯一的极大子群,从而G/P恰有1个极大子群,因而G/P为素数幂阶循环群.特别地,G/P可解.显然P可解,故G可解.

令$F(G)$为G的Fitting子群.因为G可解且$\Phi(G)=1$,所以在引理5中$s=2$,$|U_1|=|U_2|=3$,$G=(U_1 \times U_2 \times Z(G))A$.令$|G/P|=q^n$,$Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$,则$G=[P]Q$,其中$Q$为$q^n$阶循环群,且由$P \trianglelefteq G$得$P \leqslant F(G)=U_1 \times U_2 \times Z(G)$,$A \leqslant Q$.令$U_1=\langle x\rangle$,$U_2=\langle y\rangle$,$Q=\langle z\rangle$,其中$o(x)=3$,$o(y)=3$,$o(z)=q^n$.因为$U_1 \trianglelefteq G$,所以$U_1,U_2 \leqslant Z(P)$,且$x^z=x$或$x^2$.若$x^z=x$,则$xz=zx$,从而$x \in Z(G)$,即$U_1 \leqslant Z(G)$,矛盾,因此只能有$x^z=x^2$.同理可得$y^z=y^2$.于是$C_Q(x)=C_Q(U_1)<Q$.因为$Q/C_Q(U_1)$同构于$\mathrm{Aut}(U_1)$的一个子群且$\mathrm{Aut}(U_1) \cong Z_2$,所以$Q/C_Q(U_1) \cong Z_2$,这样$Q$为2-群.

设$|Q|=2^n$,若$n \geqslant 2$,则由$x^z=x^2$,$y^z=y^2$得$x^{z^2}=x$,$y^{z^2}=y$,因此$1 \neq z^2 \in Z(G)$.注意到$G=(U_1 \times U_2 \times Z(G))A$且$P \leqslant U_1 \times U_2 \times Z(G)$,所以$Q$可以表示成$A$与$Z(G)$的Sylow q-子群的直积,这显然与Q为循环群矛盾.因此$n=1$,$A=Q$为2阶循环群.于是$P=U_1 \times U_2 \times Z(G)$,$G=(U_1 \times U_2 \times Z(G))Q$.因为$G/Z(G) \cong (U_1 \times U_2)Q$为18阶Frobenius群,易见$(U_1 \times U_2)Q$中有10个极大子群,这样$G/Z(G)$,从而$G$至少有10个极大子群,矛盾.

这样就证明了引理9成立.

2 主要结果及其证明

定理1 设G是有限幂零群,则G恰有7个极大子群当且仅当G是下列群之一:

(ⅰ)$G=P_1 \times P_2 \times P_3 \times P_4 \times P_5 \times P_6 \times P_7$,其中$P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$为循环群;

(ⅱ)$G=P_1 \times P_2 \times P_3 \times P_4 \times P_5$,其中$P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$,$P_1$为二元生成的2-群,$P_2,P_3,P_4$和$P_5$为循环群;

(ⅲ)$G=P_1 \times P_2 \times P_3 \times P_4$,其中$P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$且$P_1$为二元生成的3-群,$P_2$和$P_3$为循环群;

(ⅳ)$G=P_1 \times P_2$,其中$P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$且$P_1$为二元生成的2-群,$P_2$为二元生成的3-群;

(ⅴ)$G=P_1 \times P_2$,其中$P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$且$P_1$为二元生成的5-群,$P_2$为循环群.

（ⅵ）G 为 3 元生成的 2 -群．

类似于文献[7]的定理 1 的证明可得定理 1 成立．

定理 2　设 G 是非幂零的有限可解群且 $\Phi(G)=1$，则 G 恰有 7 个极大子群当且仅当 G 同构于下列情形之一的群：

（ⅰ）$D_{10}\times Z_p$，其中 p 为奇素数；

（ⅱ）$[Z_5]Z_4\times Z_p=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^p=1,b^{-1}ab=a^3,ac=ca,bc=cb\rangle$，其中 p 为奇素数；

（ⅲ）$A_4\times Z_p\times Z_q$，其中 $p\neq q$ 为异于 3 的素数；

（ⅳ）$S_3\times Z_p\times Z_q\times Z_r$，其中 p,q,r 为互不相同的奇素数；

（ⅴ）$S_3\times Z_2\times Z_p$，其中 p 为奇素数．

证明　易见充分性成立．下证必要性．

首先由 G 可解知 G 有正规极大子群．因为 $\Phi(G)=1$，所以由引理 9 知在引理 5 中 $s=1$．令 $U=U_1$，则 $G=(U\times Z(G))A$，此时 G 恰有 1 个非正规极大子群的共轭类，且轨道长为 $3\leqslant|U|\leqslant 5$．因此 G/U 的每个极大子群正规，从而 G/U，即 $Z(G)A$ 为幂零群．注意到 $Z(G)A=Z(G)\times A$，进一步有，若 A 交换，则 A 忠实作用在 U 上，从而 $A\leqslant \mathrm{Aut}(U)$；若 $Z(G)$ 非平凡，因为 $Z(G)$ 为 G 的极小正规子群的直积，所以 $Z(G)$ 为素数阶循环群的直积．

情形 Ⅰ　若 $|U|=5$，则 $U\cong Z_5$ 且 $\mathrm{Aut}(U)=Z_4$，G/U 至多有 2 个极大子群．

假定 G/U 恰有 1 个极大子群，则 $Z(G)A$ 为素数幂阶循环群，因此 $Z(G)=1$，$A=Z_2$ 或 Z_4．若 $A=Z_2$，则 $G=UA\cong D_{10}$；若 $A=Z_4$，则 $G=UA\cong[Z_5]Z_4=\langle a,b\mid a^5=b^4=1,b^{-1}ab=a^3\rangle$，由引理 8，此时 G 恰有 6 个极大子群，矛盾．

假定 G/U 恰有 2 个极大子群，由引理 6，$Z(G)A$ 为 2 个不同的素数幂阶循环群的直积，故 A 交换群，于是 $A=Z_2$ 或 Z_4，$|Z(G)|=p$，其中 p 是不同于 2 的素数．若 $A=Z_2$，则 $G=(Z_5\times Z_p)Z_2\cong D_{10}\times Z_p$，$G$ 为（ⅰ）-型群；若 $A=Z_4$，则 $G=(Z_5\times Z_p)Z_4\cong[Z_5]Z_4\times Z_p=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^p=1,b^{-1}ab=a^3,ac=ca,bc=cb\rangle$，$G$ 为（ⅱ）-型群．

情形 Ⅱ　若 $|U|=4$，则 $U\cong Z_2\times Z_2$ 且 $\mathrm{Aut}\,U\cong S_3$，此时 G/U 至多有 3 个极大子群．

假定 G/U 恰有 1 个极大子群，类似于情形 Ⅰ 中的推理得 $Z(G)=1$ 且 $A=Z_2$ 或 Z_3．若 $A=Z_2$，则 $G=UA$ 为 8 阶初等交换 2 -群，于是 G 交换，矛盾；若 $A=Z_3$，于是 $G=(Z_2\times Z_2)Z_3\cong A_4$，由引理 7，此时 G 恰有 5 个极大子群，矛盾．

假定 G/U 恰有 2 个极大子群，类似于情形 Ⅰ 中的推理得 $Z(G)=1$ 且 $A=Z_2$ 或 Z_3．若 $A=Z_2$，可得矛盾；若 $A=Z_3$，则 $|Z(G)|=p$，其中 p 是不同于 3 的素数．易见 $UA\cong A_4$，于是 $G=A_4\times Z_p$，由引理 8，此时 G 恰有 6 个极大子群，矛盾．

假定 G/U 恰有 3 个极大子群．由引理 6，则 $Z(G)A$ 为 2 元生成的 2 -群或 3 个阶为不同素数幂的循环群的直积．

若 $Z(G)A$ 为 3 个阶为不同素数幂的循环群的直积，则 A 交换，因此 $A=Z_2$ 或 Z_3．若 $A=Z_2$，与上同理可得 G 交换，矛盾；若 $A=Z_3$，则 $Z(G)=Z_p\times Z_q$，其中 $3,p,q$ 是互不相同的素数．易见 $UA\cong A_4$，于是 $G\cong A_4\times Z_p\times Z_q$，$G$ 为（ⅲ）-型群．

若 $Z(G)A$ 为 2 元生成的 2 -群，若 A 交换，则 $A=Z_2$，$|Z(G)|=2$，此时 UA 只能为 8 阶初等交换 2-群，从而 G 交换，矛盾；若 A 为非交换群，假定 $Z(G)\neq 1$，则 $|Z(G)|=2$，这样由 $Z(G)A=Z(G)\times A$ 得 A 循环，矛盾．因此 $Z(G)=1$，A 为 2 元生成的非交换群 2 -群．因为 A 为 G 的非正规极大子群且 $|G:A|=4$，所以 G 的其他 3 个极大子群为正规的，设为 M_1,M_2,M_3．显然 $|G:M_i|=2$，$i=1,2,3$．令 N 为 A 在 G 中的核，则 G/N 同构于 S_4 的一个子群．易见 G/N 中非正规极大子群的只有 4 个且共轭，因此 $G/N\cong A_4$．若 $N\leqslant M_i$，$i=1,2,3$，则 $N=N\cap M_1\cap M_2\cap M_3=\Phi(G)=1$，因此 $G\cong A_4$，G 恰有 5 个极大子群，矛盾．故可假定 $N\not\leqslant M_1$，此时 $G=NM_1$．因此 $G/N\cap M_1\cong N/N\cap M_1\times M_1/N\cap M_1$．同理若 $N\cap M_1\leqslant M_2$，$N\cap M_1\leqslant M_3$，则 $N\cap M_1=\Phi(G)=1$，从而 $G\cong N/N\cap M_1\times M_1/N\cap M_1$．因为 $M_1/N\cap M_1\cong G/M_2$，所以 $Z(G)\neq 1$，矛盾．故可假定 $N\cap M_1\not\leqslant M_2$，此时 $G=(N\cap M_1)M_2$．令 $K=N\cap M_1\cap M_2$，则 $G/K\cong(N\cap$

$M_1)/K\times M_2/K$ 且 $(N\cap M_1)/K\cong G/M_2$. 若 $K\leqslant M_3$,则 $K=\Phi(G)=1$,从而 $G\cong(N\cap M_1)/K\times M_2/K$,于是 $Z(G)\neq 1$,矛盾. 因此 $K\not\leqslant M_3$,$G=KM_3$. 因为 $K\cap M_3=\Phi(G)=1$,所以 $G\cong K\times M_3$ 且 $K\cong G/M_3$,于是 $Z(G)\neq 1$,矛盾.

情形 Ⅲ　若 $|U|=3$,则 $U\cong Z_3$ 且 $\mathrm{Aut}\,U\cong Z_2$,易见 G/U 的极大子群至多有 4 个.

假定 G/U 恰有 1 个极大子群,类似于情形 Ⅰ 中的推理可得 $G\cong S_3$,但此时 G 恰有 4 个极大子群,矛盾.

假定 G/U 恰有 2 个极大子群,类似于情形 Ⅱ 中的推理,可得 $A=Z_2$ 且 $Z(G)=Z_p$,其中 p 是异于 2 的素数. 于是 $G=S_3\times Z_p$,由引理 7,G 有 5 个极大子群,矛盾.

假定 G/U 恰有 3 个极大子群,由引理 6,则 G/U,亦即 $Z(G)A$ 为 2 元生成的 2 -群或 3 个阶为不同素数幂的循环群的直积.

若 $Z(G)A$ 为 2 元生成的 2 -群,若 A 为交换群,则 $A=Z_2$,从而 $Z(G)=Z_2$,这时 $G=(Z_3\times Z_2)Z_2\cong S_3\times Z_2$,由引理 8,$G$ 恰有 6 个极大子群,矛盾;若 A 为非交换群,类似于情形 Ⅱ 中的推理,可得矛盾.

若 $Z(G)A$ 为 3 个阶为不同素数幂的循环群的直积,类似于情形 Ⅱ 中的推理,则 $A=Z_2$,$Z(G)=Z_p\times Z_q$,其中 $2,p,q$ 为互不相同的素数,因此 $G=(Z_3\times Z_p\times Z_q)Z_2\cong S_3\times Z_p\times Z_q$,由引理 8,$G$ 恰有 6 个极大子群,矛盾.

假定 G/U 恰有 4 个极大子群,因为 G/U 为幂零群,由引理 6,G/U,即 $Z(G)A$ 为 2 元生成的 3 -群,或 4 个阶为不同素数幂的循环群的直积,或 2 元生成的 2 -群与奇素数幂阶循环群的直积.

类似于情形 Ⅱ 中的推理,假定 $Z(G)A$ 为 2 元生成的 3 -群. 若 A 交换,则 $A=Z_2$,显然矛盾;若 A 非交换,则必有 $Z(G)=1$,从而 $G=UA$ 为 3 -群,$Z(G)$ 非平凡,矛盾. 假定 $Z(G)A$ 为 4 个阶为不同素数幂的循环群的直积,则 $A=Z_2$,$Z(G)=Z_p\times Z_q\times Z_r$,因此 $G=(Z_3\times Z_p\times Z_q\times Z_r)Z_2\cong S_3\times Z_p\times Z_q\times Z_r$,$G$ 为(ⅳ)-型群. 假定 $Z(G)A$ 为 2 元生成的 2 -群与奇素数幂阶循环群的直积,若 A 交换,则 $A=Z_2$,$Z(G)=Z_2\times Z_p$,其中 p 为奇素数,因此 $G\cong(Z_3\times Z_2\times Z_p)Z_2=S_3\times Z_2\times Z_p$,$G$ 为(ⅴ)-型群;若 A 非交换,则 A 为 2 元生成的非交换 2 -群,$Z(G)$ 为 p 阶循环群,其中 p 为奇素数. 因为 $G=(U\times Z(G))A=UA\times Z(G)$,注意到 UA 为 G 的正规极大子群且 $Z(G)$ 含于 G 的另 6 个极大子群,所以 UA 恰有 6 个极大子群且 UA 有平凡的中心,由引理 8,可得矛盾.

这样就证明了定理 2 成立.

定理 3　设 G 是有限非幂零群,则 G 恰有 7 个极大子群当且仅当 G 是下列情形之一的可解群:

(ⅰ) $G/\Phi(G)\cong D_{10}\times Z_p$,其中 p 为奇素数;

(ⅱ) $G/\Phi(G)\cong[Z_5]Z_4\times Z_p=\langle a,b,c\mid a^5=b^4=c^p=1,b^{-1}ab=a^3,ac=ca,bc=cb\rangle$,其中 p 为奇素数;

(ⅲ) $G/\Phi(G)\cong A_4\times Z_p\times Z_q$,其中 $p\neq q$ 为异于 3 的素数;

(ⅳ) $G/\Phi(G)\cong S_3\times Z_p\times Z_q\times Z_r$,其中 p,q,r 为互不相同的奇素数;

(ⅴ) $G/\Phi(G)\cong S_3\times Z_2\times Z_p$,其中 p 为奇素数.

证明　易见充分性成立. 下证必要性.

首先断言 G 为可解群. 令 G 为极小反例. 由引理 1,G 的任意同态像的极大子群的个数不大于 7,所以可设 G 有唯一极小正规子群 N 且 G/N 可解而 N 不可解. 假定 $C_G(N)\neq 1$. 因为 $C_G(N)\lhd G$,所以 $N\leqslant C_G(N)$,从而 N 为交换群,与 N 不可解矛盾,故必有 $C_G(N)=1$. 若 N 包含于 G 的每一个极大子群,则 $N\geqslant\Phi(G)$. 但由 $\Phi(G)$ 幂零得 N 可解,矛盾. 于是有 G 的极大子群 M 使得 $N\not\leqslant M$,因此 $G=MN$ 且 $M\cap N<N$. 令 p 是 $|N:M\cap N|$ 的素因子,$P\in\mathrm{Syl}_p(N)$. 因为 N 不可解,所以 $P<N$. 由于 N 是 G 的唯一极小正规子群,因此 P 在 G 中不正规,即有 $N_G(P)<G$. 令 K 是 G 的包含 $N_G(P)$ 的极大子群. 易见 M,K 在 G 中不共轭,因此或者 $|G:M|=|G:K|=3$ 且 G 恰有 1 个正规极大子群,或者 $|G:M|$ 和 $|G:K|$ 中有一个为 4,另一个为 3. 对于前者由引理 9 可得矛盾,对后一情形,不妨设 $|G:M|=4$,则 G/M_G 同构于 S_4 的一个子群,因此由 S_4 可解得 G/M_G,从而 G 有正规极大子群,矛盾. 故 G 为可解群.

由引理 2,$G/\Phi(G)$ 恰有 7 个极大子群. 因为 $G/\Phi(G)$ 有平凡的 Frattini 子群,所以由定理 2,$G/\Phi(G)$ 为

定理 2 中的（ⅰ）至（ⅴ）-型群.

这样就证明了定理 3 成立.

参考文献：

[1] ADNAN S. On Groups Having Exactly 2 Conjugacy Classses of Maximal Subgroups [J]. Lincei-Rend. Sc. Fis. Mat. Enat.，1979，66：175-178.

[2] ADNAN S. On Groups Having Exactly 2 Conjugacy Classses of Maximal Subgroups II [J]. Ibib.，1980，68：179.

[3] 施武杰. 极大子群同阶类类数不大于 2 的有限群 [J]. 数学年刊：A 辑，1985(5)：532-537.

[4] 李世荣. 非正规极大子群同阶类类数等于 2 的有限群 [J]. 数学学报，1990(3)：388-392.

[5] 黎先华. 极大子群同阶类类数＝3 的有限群 [J]. 数学学报，1994(1)：108-115.

[6] 王立中. 极大子群个数＜5 的有限群 [J]. 首都师范大学学报，2000，21(3)：10-13.

[7] 游兴中，王香芬，陈为敏. 恰有 5 个极大子群的有限群 [J]. 吉首大学学报：自然科学版，2010，31(5)：8-10.

[8] 游兴中，朱伟华，刘　峥. 恰有 6 个极大子群的有限群 [J]. 吉首大学学报：自然科学版，2011，32(3)：1-3.

[9] 徐明曜. 有限群导引 [M]. 北京：科学出版社，1999.

[10] HUPPERT B. Endlich Gruppen I [M]. Berlian：Springer-Verlag，1979.

Finite Groups with Just 7 Maximal Subgroups

YOU Xing-zhong，LIU Zheng，ZHU Wei-hua

(College of Mathematics and Computing Science，Changsha University of Science and Technology，Changsha 410004，China)

Abstract：It is investigated how the number of maximal subgroups of a finite group influences its structure and determine the structure of a finite group with just seven maximal subgroups in this paper.

Key words：finite group；maximal subgroup；conjugacy

（责任编辑　向阳洁）

（上接第 10 页）**参考文献：**

[1] SMARANDACHE F. Only Proplem，Not Solution [M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.

[2] WANG Yong-xing. On the Smarandache Function [J]. Reserchon Smarandache Problem in Number Theory，2005，2：103-106.

[3] LU Ya-ming. On the Solution of an Equation Involving the Smarandache Function [J]. Scientia Magna，2006，2(1)：76-79.

[4] SANDOR J. On a Dual of the Pseudo-Smarandache Function [J]. Smarandache Notions，2002，13：16-23.

[5] 黄　炜. K 次方根序列的均值渐近公式 [J]. 甘肃科学学报，2009，21(3)：10-11.

[6] 黄　炜. 素因数和函数 $\bar{\omega}(n)$ 及其均值 [J]. 河南科学，2009，27(9)：1 031-1 033.

[7] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报：中文版，2006，49(5)：1 009-1 012.

[8] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京：科学出版社，1999.

Smarandache Involving Function and Its Asymptotic Formula

HUANG Wei

(Department of Basis，Baoji Vocational and Technical College，Baoji 721013，Shaanxi China)

Abstract：The hybrid mean value of divisor products function was studied and two asymptotic formula of this function was given by using the analytic methods.

Key words：Smarandache involving function；mean value；asymptotic formula

（责任编辑　向阳洁）