

文章编号:1007-2985(2011)06-0047-04

# 基于量子理论方法的原子激光冷却机理分析\*

王 岩<sup>1</sup>, 刘晓静<sup>1</sup>, 陈万金<sup>1</sup>, 王清才<sup>1</sup>, 张丙新<sup>2</sup>

(1. 吉林师范大学物理学院, 吉林 四平 136000; 2. 中国科学院高能物理研究所, 北京 100049)

**摘 要:**应用含保守系统和非保守系统的薛定谔方程分析了激光冷却机制, 用该理论证明了原子在激光场中被冷却. 并预言了原子冷却温度与原子振动频率成正比, 该结论与最近在 Nature 发表的实验结果完全一致.

**关键词:**量子理论; 原子冷却; 冷却温度

中图分类号: O41

文献标志码: A

20 世纪 70 年代中期开始的激光冷却与捕陷中性原子技术的研究, 使人类进入了一个空前的超低温( $10^{-4} \sim 10^{-9}$  K) 领域. 在这个新领域中人们实现了新的物态(气态原子的波色—爱因斯坦凝聚, BEC), 发现了一系列新的物理现象, 一些新的学科(即所谓的超冷原子物理、原子光学)也随之兴起. 操纵、控制孤立的原子一直是物理学家追求的目标. 由于原子不停地热运动, 要想实现操纵、控制的目的, 必须使原子“冷”下来, 即降低其速度至极低, 这样才能方便地将原子控制在某个小区域中. 有关这个领域的理论和实验研究已有多篇文章评述<sup>[1-12]</sup>, 其中文献<sup>[8-12]</sup>有相当全面的论述.

激光冷却和捕陷原子研究在科学上的意义是重大的, 它将大大提高高分辨率光谱研究的精度, 从而有力地推动原子、分子物理学的发展. 与此同时, 激光冷却和捕陷原子的研究还开辟了新的原子、分子物理和光物理的研究领域. 例如, 在研究激光束与中性原子的相互作用力的基础上, 已形成了所谓“原子光学”的新分支; 用激光冷却和捕陷技术形成了所谓“超冷原子”后, 人们已经注意到这些“超冷原子”具有很多新特点. 激光冷却和捕陷原子的研究也有很大的实用意义, 其中最具有前途的是在原子频标方面的应用. 利用最先进的激光冷却技术, 可望将目前的原子钟的精度提高 2 个量级.

笔者应用含保守系统和非保守系统的薛定谔方程<sup>[13]</sup>研究了激光冷却机制, 从量子理论的角度很好的解释了原子激光冷却, 并且预言原子激光冷却的温度和原子的角频率成正比, 这和最近在 Nature 发表的实验结果符合相当好<sup>[19]</sup>.

## 1 含非保守力的薛定谔方程

在激光场中, 原子受到的力可以写成<sup>[14-15]</sup>:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{v} - \kappa\mathbf{r}, \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{v}$  是原子的速度;  $\mathbf{r}$  是原子的位矢;  $k$  是激光场中原子的阻尼系数;  $\kappa$  是弹性恢复系数. “ $-k\mathbf{v}$ ” 为激光冷却原子受到的非保守力, “ $-\kappa\mathbf{r}$ ” 为激光捕获原子的保守力, 这个力和势能  $\frac{1}{2}\kappa r^2$  相对应.

运用费曼的路径积分拓展薛定谔方程, 使其既适用保守系统也能适用于非保守系统. 路径积分的公式为<sup>[16-18]</sup>

$$\Psi(\mathbf{r}, t') = \iint \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} L[\mathbf{r}(\tau), \dot{\mathbf{r}}(\tau), \tau] d\tau\right] D[\mathbf{r}(t)] \Psi(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}', \quad (2)$$

则

$$\Psi(\mathbf{r}, t + \epsilon) = \int \frac{d\mathbf{r}'}{A^3} \exp\left[\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\epsilon}\right)^2 - V\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{2}, \frac{t' + t}{2}\right) + k \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\epsilon}\right) d\mathbf{r}''\right)\right] \Psi(\mathbf{r}', t), \quad (2)$$

通过计算, 得到了拓展后的薛定谔方程为

\* 收稿日期: 2011-06-21

作者简介: 王 岩(1985-), 男, 安徽淮北人, 吉林师范大学物理学院硕士生, 主要从事理论物理研究.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V - i\hbar \frac{3k}{m}\right) \Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

其中  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V - i\hbar \frac{3k}{m}$ . (3) 式中的势能项  $V$  对应的是保守力,  $-i\hbar \frac{3k}{m}$  这项与非保守力  $F = -kv$  相对应. 具体的推导过程可以在文献[13]中查阅. (3) 式可以描述激光场中原子在非保守力作用下的量子行为, 冷却原子受到的力为  $F = -kv - \kappa r$ .

## 2 原子激光冷却的量子理论

由(3)式可以对激光冷却用纯量子理论方法进行研究, 激光捕获原子的保守力, 这个力和势能  $\frac{1}{2}\kappa r^2$  相对应, (3) 式可以写成

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2}\kappa r^2 - i\hbar \frac{3k}{m}\right) \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (4)$$

通过分离变量法可知

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) f(t). \quad (5)$$

于是(4)式可以变为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\kappa r^2 \Psi(\mathbf{r}) = (E + i\hbar \frac{3k}{m}) \Psi(\mathbf{r}). \quad (6)$$

又因为

$$f(t) = ce^{-i/\hbar Et}, \quad (7)$$

所以波函数  $\Psi(\mathbf{r})$  和能量  $E$  写成复数形式

$$\Psi(\mathbf{r}) = R(\mathbf{r}) + iS(\mathbf{r}), \quad (8)$$

$$E = E_1 + iE_2. \quad (9)$$

于是可以得到

$$E_1 = E_N = \left(N + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ E_2 = -\hbar \frac{3k}{m}. \quad (10)$$

(6) 式的本征函数和本征值为

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \Psi_{n_x}(x) \Psi_{n_y}(y) \Psi_{n_z}(z) + i \Psi_{n_x}(x) \Psi_{n_y}(y) \Psi_{n_z}(z), \quad (11)$$

$$E = E_1 + iE_2 = \left(N + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega - i\hbar \frac{3k}{m}. \quad (12)$$

于是(4)式的特解为

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z, t) = \Psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) e^{-i/\hbar Et} = \Psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) \cdot e^{-i/\hbar E_1 t} e^{-3kt/m}. \quad (13)$$

原子的速度算符  $\hat{v}$  为

$$\hat{v} = \frac{\hat{p}}{m} = \frac{\hbar}{m} \frac{1}{i} \nabla. \quad (14)$$

速度算符  $\hat{v}$  在态  $\Psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z, t)$  下的平均值为

$$\hat{v}(t) = \int \Psi_{n_x n_y n_z}^*(x, y, z, t) \hat{v} \Psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z, t) d\mathbf{r}. \quad (15)$$

分量  $v_x$  的平均值为

$$\bar{v}_x = e^{-\frac{6k}{m}t} \int \Psi_{n_x n_y n_z}^*(x, y, z, t) \frac{\hbar}{m} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z, t) dx dy dz = 0, \quad (16)$$

$v_x^2$  的平均值为

$$\bar{v}_x^2 = -\int \Psi_{n_x n_y n_z}^*(x, y, z, t) \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial x^2} \Psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z, t) dx dy dz = e^{-\frac{6k}{m}t} \frac{\hbar \omega}{m} (2n_x + 1). \quad (17)$$

同理

$$\bar{v}_y^2 = e^{-\frac{6k}{m}t} \frac{\hbar \omega}{m} (2n_y + 1), \quad (18)$$

$$\bar{v}_z^2 = e^{-\frac{6k}{m}t} \frac{\hbar \omega}{m} (2n_z + 1). \quad (19)$$

通过(16)至(19)式发现:随着  $t$  的增加  $\overline{v_x^2}$ ,  $\overline{v_y^2}$  和  $\overline{v_z^2}$  分别趋于 0,也就是说随着时间  $t$  增加激光场中的原子被冷却了. 因为

$$\frac{1}{2} m \langle \overline{v_x^2} \rangle = \frac{1}{2} m \langle \overline{p_x^2} \rangle = \frac{1}{2} k_B T,$$

所以

$$(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{\kappa_B T}}) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{5e^{-\frac{\hbar\omega}{\kappa_B T}} - 3e^{-\frac{2\hbar\omega}{\kappa_B T}}}{(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{\kappa_B T}})^2} \right) = \frac{k_B T}{\hbar\omega}, \tag{20}$$

(20) 式是激光冷却的温度方程,由此可以得到原子冷却的温度.

### 3 数值分析

(20) 式是超越方程,由

$$y_1 = (1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{\kappa_B T}}) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{5e^{-\frac{\hbar\omega}{\kappa_B T}} - 3e^{-\frac{2\hbar\omega}{\kappa_B T}}}{(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{\kappa_B T}})^2} \right),$$

$$y_2 = \frac{k_B T}{\hbar\omega}$$

可以得到原子冷却温度,其主要的输入参数设置如下:普朗克常数  $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$  Js, 波尔兹曼常数  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  JK<sup>-1</sup>. 在激光场中,原子的振动频率大概几百千赫兹. 不同振动频率  $\omega$  的  $y_1, y_2$  与温度  $T$  之间的关系曲线如图 1,2,3 所示. 图 1 的原子冷却的温度  $T = 0.43 \mu\text{K}$ ; 图 2 的原子冷却的温度  $T = 2.167125 \mu\text{K}$ ; 图 3 的原子冷却的温度  $T = 3.90082 \mu\text{K}$ . 通过图 4 可以看到,冷却温度  $T$  和振动频率  $\omega$  成正比,满足关系式  $T = 4.334 \times 10^{-3} \omega$ ,其中,温度的单位是  $\mu\text{K}$ ,角频率的单位是 kHz. 最近, A. D. Oconnell 等<sup>[19]</sup> 在 Nature 上发表论文,发现当振动频率  $\omega = 6.175$  GHz 时,对应冷却温度  $T = 25$  mK. 由笔者求解的关系式  $T = 4.334 \times 10^{-3} \omega$ ,计算得到  $T = 25$  mK,可见这结果和实验结果符合相当好. 通过降低振动频率,可以得到更低的冷却温度.

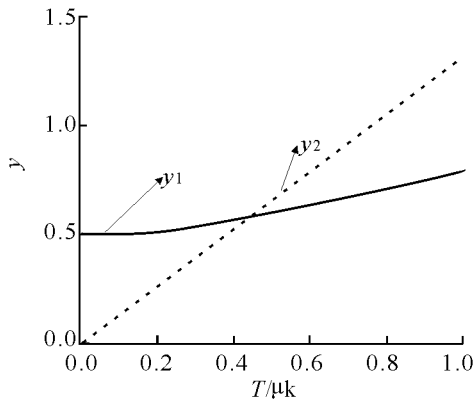


图 1  $\omega = 100$  kHz,  $y_1, y_2$  和温度  $T$  的关系

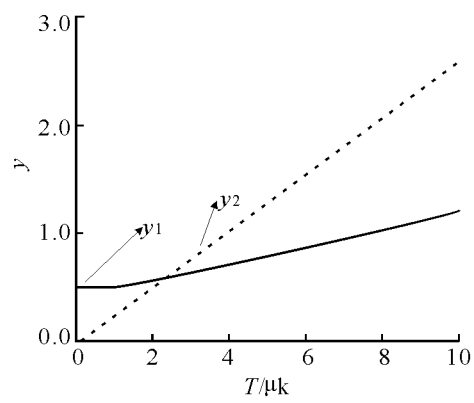


图 2  $\omega = 500$  kHz,  $y_1, y_2$  和温度  $T$  的关系

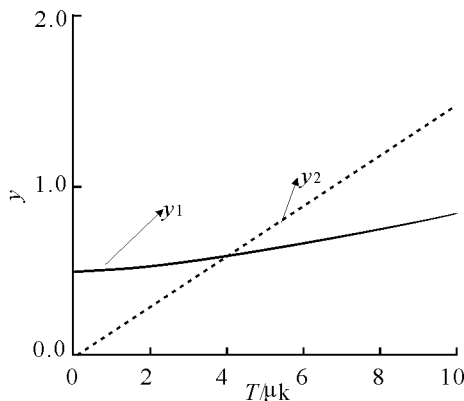


图 3  $\omega = 900$  kHz,  $y_1, y_2$  和温度  $T$  的关系

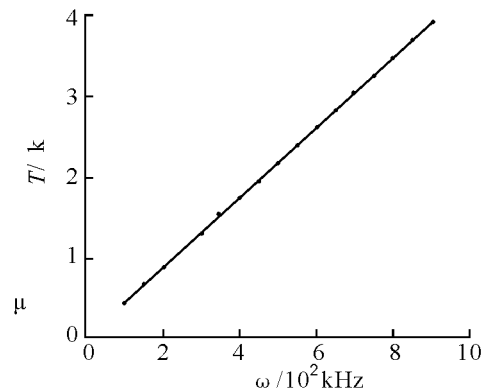


图 4 温度  $T$  与频率  $\omega$  的关系

## 4 结论

应用含保守系统和非保守系统的薛定谔方程研究激光冷却机制,可以证明原子在激光场中被冷却,同时还给出了冷却温度.通过计算得到:(1)冷却温度和原子的振动频率成正比,即  $T = 4.334 \times 10^{-3} \omega$ ; (2)通过降低振动频率可以得到更低的冷却温度,这 2 个结论都与实验结果符合的相当好.

### 参考文献:

- [1] ASHKIN A. Applications of Laser Radiation Pressure [J]. Science,1980,210:1 081.
- [2] 李师群. 低压气体原子或分子被激光的冷却和捕陷 [J]. 无线电电子学汇编,1981(3/4):61.
- [3] PHILLIPS W D. New Mechanisms for Laser Cooling [J]. Phys. Today,1990,43:33.
- [4] 王义道. 原子的激光冷却与捕陷(I,II) [J]. 物理,1990,19:389-449.
- [5] 王育竹. 激光冷却气体原子 [J]. 物理,1990,19:641.
- [6] COHEN-TANNOUDJI C,PHILLIPS W D. New, Mechanisms for Laser Cooling [J]. Phys. Today,1990,43:33.
- [7] CHU S. Laser Manipulation of Atoms and Particles [J]. Science,1991,253:861.
- [8] METCALF H. Cooling and Trapping of Neutral Atoms [J]. Phys. Rep. ,1994,244:203.
- [9] LETOKHOV V S. Laser Cooling of Atoms; A Review [J]. Quantum Semiclass Opt. ,1995,7:5.
- [10] ADAMS C S,RIIS E. Laser Cooling and Trapping of Neutral Atoms [J]. Prog. Quant Electr,1997,21:1.
- [11] PHILLIPS W D. Laser Cooling and Trapping of Neutral Atoms [J]. Rev. Mod. Phys. ,1998,70:721.
- [12] BALYKIN V I,MINGIN V G,LETOKHOV V S. Electromagnetic Trapping of Cold Atoms [J]. Rep. Prog. Phys. ,2000,63:1 429.
- [13] WU X Y,ZHANG B J,LI H B, et al. Quantum Wave Equation for Non-Conservative System Int. [J]. J. Theor. Phys. ,2009,48:2 027.
- [14] SESKO D W,WALKER T G,WIEMAN C E. Behavior of Neutral Atoms in a Spontaneous Force Trap [J]. J. Opt. Soc. Am. ,1991,B8:946-951.
- [15] STEANE A M,CHOWDHURY M,FOOT C J. Collisions of Ultracold Trapped Atoms [J]. J. Opt. Soc. Am. ,1992, B9:2 142-2 158.
- [16] FEYNMAN R P. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics [J]. Rev. Mod. Phys. ,1948,20:367-387.
- [17] FEYNMAN R P, HIBBS A R. Quantum Mechanics and Path Integrals [M]. New York: McGraw-Hill Book Co. ,1965.
- [18] FEYNMAN R P. Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction [J]. Phys. Rev. ,1950,80:440-547.
- [19] OCONNELL A D,HOFHEINZ M,ANSMANN M, et al. Quantum Ground State and Single-Phonon Control of a Mechanical Resonator [J]. Nature,2010,464:697-703.

## Mechanism Analysis of Atom Laser Cooling Based on Quantum Theory

WANG Yan<sup>1</sup>, LIU Xiao-jing<sup>1</sup>, CHEN Wan-jin<sup>1</sup>, WANG Qing-cai<sup>1</sup>, ZHANG Bing-xin<sup>2</sup>

(1. Institute of Physics, Jilin Normal University, Siping 136000, Jilin China; 2. Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

**Abstract:** The laser cooling mechanisms with extended Schrodinger quantum wave equation is studied, which can describe a particle in conversative and non-conversative force field. With this theory, it is proved that the atom in laser field can be cooled, and it is predicted that the atom cooling temperature  $T$  is directly proprtrional to the atom vibration frequency, which are in accordance with experiment results.

**Key words:** quantum theory; laser cooling; cool temperature

(责任编辑 陈炳权)