第 32 卷 第 6 期
2011 年 11 月

吉首大学学报(自然科学版)
Journal of Jishou University (Natural Science Edition)

Vol. 32 No. 6
Nov. 2011

文章编号:1007-2985(2011)06-0001-04

关于圈 C_{4h+3} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$-冠的优美性*

吴跃生[1],李咏秋[2]

(1.华东交通大学基础科学学院,江西 南昌 330013;2.华东交通大学图书馆,江西 南昌 330013)

摘 要:给出了圈 C_{4h+3} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$-冠的定义,讨论了圈 C_{4h+3} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$-冠的优美性,用构造性的方法给出了一些特殊的圈 C_{4h+3} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$-冠的优美标号.

关键词:圈;冠;优美图

中图分类号:O157.5　　　　文献标志码:A

1 相关定义

文中所讨论的图均为无向简单图,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集.

定义 1[1] 对于一个图 $G=(V,E)$,若存在一个单射 $\theta:V(G)\to\{0,1,2,\cdots,|E(G)|\}$,使得对所有边 $e=(u,v)\in E(G)$,由 $\theta'(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$ 导出的 $E(G)\to\{1,2,\cdots,|E(G)|\}$ 是一个双射,则称 G 是优美图,θ 是 G 的一组优美标号,称 θ' 为 G 的边上的由 θ 导出的诱导值.

定义 2[1] 在图 G 每个顶点都粘接了 r 条悬挂边($r\geqslant 1$ 的整数)所得到的图,称为图 G 的 r-冠. 图 G 的 1-冠,称做图 G 的冠.

定义 3 $V(G)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 的每个顶点 v_i 都粘接了 r_i 条悬挂边($r_i\geqslant 0$ 的整数,$i=1,2,\cdots,n$)所得到的图,称为图 G 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)$-冠,简记为 $G(r_1,r_2,\cdots,r_n)$. 特别地,当 $r_1=r_2=\cdots=r_n=r$ 时,称为图 G 的 r-冠. 图 G 的 0-冠就是图 G.

文献[1]中证明了图 $P_1\vee P_n$ 的优美性,并证明了图 $P_1\vee P_n$ 的 r-冠的优美性,由此猜想:任意优美图的 r-冠都是优美图.

文献[2-5]在上猜想的引导下,证明了一些优美图(如圈 $C_n(n\equiv 0,3\pmod 4)$)的 r-冠是优美的. 文[6-10]给出了圈 C_n 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)$-冠的定义,讨论了当 $n=3,7,8,11,4h$ 时,圈 C_n 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)$-冠的优美性. 文献[11-13]给出了图 $\omega_{n,m}$ 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{n+m-1})$-冠的定义,讨论了一些图 $\omega_{n,m}$ 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{n+m-1})$-冠的优美性. 笔者讨论了当 $n=4h+3$ 时,圈 C_n 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)$-冠的优美性.

2 主要结果及其证明

定理 1 设 $n=4h+3$,h 为自然数($i=1,2,\cdots,4h+3$),$r_i(i=1,2,\cdots,4h+3)$ 为任意自然数,圈 C_n 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)$-冠的顶点集如图 1 所示,$V(C_n)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$,与 v_i 邻接的端点(或叶)记为 $x_{ij}(v_i\in V(C_n),j=1,2,\cdots,r_i)$,当 $\sum_{i=1}^{h+1}r_{2i}=\sum_{i=0}^{h-1}r_{4h+3-2i}$ 时,圈 C_n 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)$-冠是优美图.

---

* 收稿日期:2011-05-18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11061014)

作者简介:吴跃生(1959-),男,江西瑞金人,华东交通大学基础科学学院副教授,硕士,主要从事图论研究.

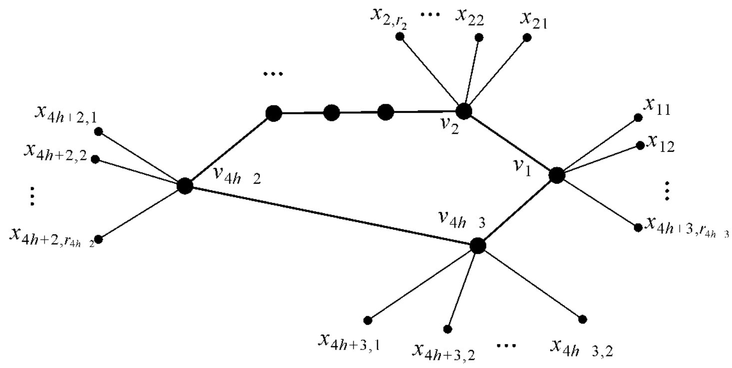

图1 圈 C_{4h+3} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$ -冠

证明 定义圈 C_{4h+3} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$ -冠的顶点标号 θ 为:

$$\theta(v_{2i-1})=i-1+\sum_{k=1}^{i}r_{2k-2}\qquad i=1,2,\cdots,2h+2,\text{令 } r_0=0;$$

$$\theta(v_{2i})=4h+4-i+\sum_{k=1}^{4h+3}r_k-\sum_{k=1}^{i}r_{2k-1}\qquad i=1,2,\cdots,h+1;$$

$$\theta(v_{2i})=4h+3-i+\sum_{k=1}^{4h+3}r_k-\sum_{k=1}^{i}r_{2k-1}\qquad i=h+2,h+3,\cdots,2h+1.$$

当 $r_j=0$ 时,$x_{ji}=v_j(j=1,2,\cdots,4h+3)$.

当 $r_j\neq 0$ 时,

$$\theta(x_{1i})=4h+4+\sum_{k=1}^{4h+3}r_k-i\qquad i=1,2,\cdots,r_1,$$

$$\theta(x_{ji})=\theta(v_{j-1})+(-1)^j i\qquad j=2,3,\cdots,4h+3;i=1,2,\cdots,r_j.$$

容易验证,$\theta:V(C_{4h+3}(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3}))\to\{0,1,2,\cdots,4h+3+\sum_{k=1}^{4h+3}r_k\}$ 是一个单射.

$$\theta'(v_jx_{ji})=|\theta(v_j)-\theta(x_{ji})|=4h+5-j+\sum_{k=j}^{4h+3}r_k-i\qquad j=1,2,\cdots,2h+3;i=1,2,\cdots,r_j,$$

$$\theta'(v_jx_{ji})=|\theta(v_j)-\theta(x_{ji})|=4h+4-j+\sum_{k=j}^{4h+3}r_k-i\qquad j=2h+4,2h+5,\cdots,4h+3;i=1,2,\cdots,r_j,$$

$$\theta'(v_{j+1}v_j)=|\theta(v_{j+1})-\theta(v_j)|=4h+4-j+\sum_{k=j+1}^{4h+3}r_k\qquad j=1,2,\cdots,2h+2,$$

$$\theta'(v_{j+1}v_j)=|\theta(v_{j+1})-\theta(v_j)|=4h+3-j+\sum_{k=j+1}^{4h+3}r_k\qquad j=2h+3,2h+4,\cdots,4h+2.$$

$$\theta'(v_{4h+3}v_1)=|\theta(v_{4h+3})-\theta(v_1)|=2h+1+\sum_{k=1}^{2h+2}r_{2k-2}.$$

当 $n=4h+3$,h 为自然数,r_i 为任意自然数 $(i=1,2,\cdots,4h+3)$,且 $\sum_{i=1}^{h+1}r_{2i}=\sum_{i=0}^{h-1}r_{4h+3-2i}$ 时,$\theta':E(C_{4h+3}(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3}))\to\{1,2,\cdots,4h+3+\sum_{k=1}^{4h+3}r_k\}$ 是一个双射.

因此 θ 是 C_{4h+3} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$ -冠的优美标号.

在定理1中,令 $r_1=r_2=\cdots=r_{4h+3}=0$,有以下结果:

推论1 C_{4h+3} 的0-冠是优美图.

定理2 设 $n=4h+3$,h 为自然数,r_i 为任意自然数 $(i=1,2,\cdots,4h+3)$,圈 C_n 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ -冠的顶点集如图1所示,$V(C_n)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$,与 v_i 邻接的端点(或叶)记为 $x_{ij}(v_i\in V(C_n),j=1,2,\cdots,r_i)$,当 $\sum_{i=1}^{h+1}r_{2i}=\sum_{i=1}^{h+1}r_{4h-2i+5}$ 时,圈 C_n 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ -冠是优美图.

证明 定义圈 C_{4h+3} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$ -冠的顶点标号 θ 为:

$$\theta(v_{2i-1}) = i - 1 + \sum_{k=1}^{i} r_{2k-2} \qquad i = 1, 2, \cdots, h+1, \text{令 } r_0 = 0;$$

$$\theta(v_{2i-1}) = i + \sum_{k=1}^{i} r_{2k-2} \qquad i = h+2, h+3, \cdots, 2h+2;$$

$$\theta(v_{2i}) = 4h + 4 - i + \sum_{k=1}^{4h+3} r_k - \sum_{k=1}^{i} r_{2k-1} \qquad i = 1, 2, \cdots, 2h+1.$$

当 $r_j = 0$ 时，$x_{ji} = v_j (j = 1, 2, \cdots, 4h+3)$.

当 $r_j \neq 0$ 时，

$$\theta(x_{1i}) = 4h + 4 + \sum_{k=1}^{4h+3} r_k - i \qquad i = 1, 2, \cdots, r_1,$$

$$\theta(x_{ji}) = \theta(v_{j-1}) + (-1)^j i \qquad j = 2, 3, \cdots, 4h+3; i = 1, 2, \cdots, r_j.$$

容易验证，$\theta: V(C_{4h+3}(r_1, r_2, \cdots, r_{4h+3})) \to \{0, 1, 2, \cdots, 4h + 3 + \sum_{k=1}^{4h+3} r_k\}$ 是一个单射.

$$\theta'(v_j x_{ji}) = |\theta(v_j) - \theta(x_{ji})| = 4h + 5 - j + \sum_{k=j}^{4h+3} r_k - i \qquad j = 1, 2, \cdots, 2h+3; i = 1, 2, \cdots, r_j,$$

$$\theta'(v_j x_{ji}) = |\theta(v_j) - \theta(x_{ji})| = 4h + 4 - j + \sum_{k=j}^{4h+3} r_k - i \qquad j = 2h+4, 2h+5, \cdots, 4h+3; i = 1, 2, \cdots, r_j,$$

$$\theta'(v_{j+1} v_j) = |\theta(v_{j+1}) - \theta(v_j)| = 4h + 4 - j + \sum_{k=j+1}^{4h+3} r_k \qquad j = 1, 2, \cdots, 2h+1,$$

$$\theta'(v_{j+1} v_j) = |\theta(v_{j+1}) - \theta(v_j)| = 4h + 3 - j + \sum_{k=j+1}^{4h+3} r_k \qquad j = 2h+2, 2h+3, \cdots, 4h+2,$$

$$\theta'(v_{4h+3} v_1) = |\theta(v_{4h+3}) - \theta(v_1)| = 2h + 2 + \sum_{k=1}^{2h+2} r_{2k-2}.$$

当 $n=4h+3$，h 为自然数，r_i 为任意自然数 $(i=1,2,\cdots,4h+3)$，且 $\sum_{i=1}^{h+1} r_{2i} = \sum_{i=1}^{h+1} r_{4h-2i+5}$ 时，$\theta': E(C_{4h+3}(r_1, r_2, \cdots, r_{4h+3})) \to \{1, 2, \cdots, 4h + 3 + \sum_{k=1}^{4h+3} r_k\}$ 是一个双射.

因此 θ 是 C_{4h+3} 的 $(r_1, r_2, \cdots, r_{4h+3})$-冠的优美标号.

在定理 2 中，令 $r_1 = r_2 = \cdots = r_{4h+3} = r$，有以下结果：

推论 2　C_{4h+3} 的 r-冠是优美图.

3　举例

例 1　下面根据定理 1、定理 2 给出圈 C_{15} 的 $(0,1,0,2,0,3,0,4,0,0,0,0,0,0,10)$-冠的 2 种优美标号，如图 2，3 所示. 根据定理 2 给出圈 C_{15} 的 $(0,1,0,2,0,3,0,4,5,0,0,0,0,0,5)$-冠的优美标号，如图 4 所示.

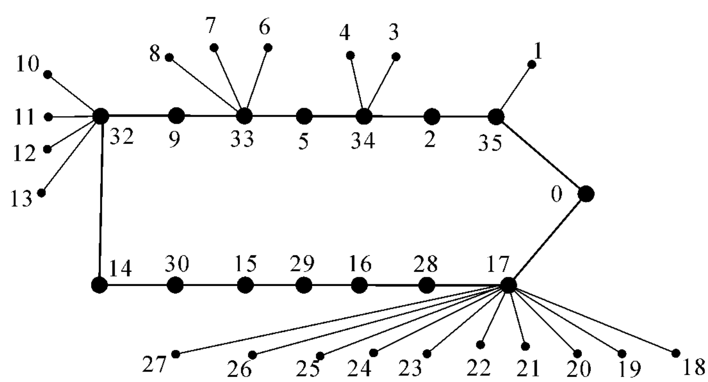

图 2　圈 C_{15} 的 $(0,1,0,2,0,3,0,4,0,0,0,0,0,0,10)$-冠的第 1 种优美标号

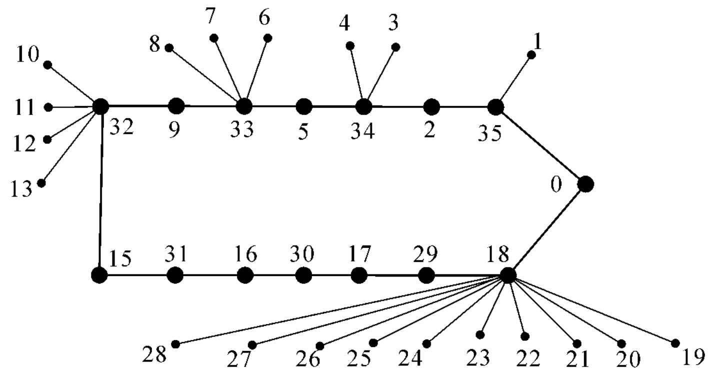

图3 圈 C_{15} 的(0,1,0,2,0,3,0,4,0,0,0,0,0,0,0,10)-冠的第2种优美标号

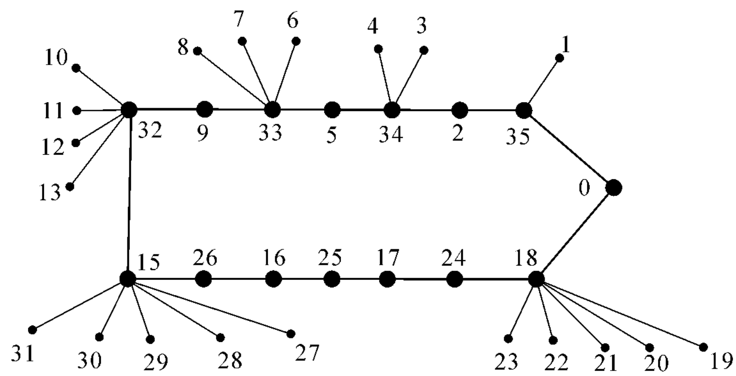

图4 圈 C_{15} 的(0,1,0,2,0,3,0,4,5,0,0,0,0,0,5)-冠的优美标号

参考文献:

[1] 马杰克. 优美图[M]. 北京:北京大学出版社,1991.

[2] 武建春. 图 $D_{2,4k}$ 与它的 r-冠的优美性[J]. 内蒙古电大学刊,2002(1):34.

[3] 陈淑贞. 关于回路的 r-冠的优美性[J]. 海南师范学院学报,1997,10(1):29-31.

[4] 曾朝英,武建春. 关于优美图 C_n 和 $C_n \odot k_1$ 的 r-冠的优美性[J]. 集宁师专学报,2000,22(4):4-7.

[5] 胡红亮. 图 C_n 及其 r-冠的新的优美标号[J]. 纯粹数学与应用数学,2010,26(3):454-457.

[6] 吴跃生,李咏秋. 关于圈 C_n 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)$-冠($n=7,8$)的优美性[J]. 阜阳师范学院学报:自然科学版,2010,27(3):20-23.

[7] 吴跃生,李咏秋. 关于圈 C_{11} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{11})$-冠的优美性[J]. 长春师范学院学报,2010,29(6):4-8.

[8] 吴跃生,李咏秋. 再探圈 C_n 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)$-冠($n=7,8$)的优美性[J]. 阜阳师范学院学报:自然科学版,2010,27(4):1-4.

[9] 吴跃生,李咏秋. 关于圈 C_3 的 $(1,2a,2a+1)$-冠的优美性[J]. 河南教育学院学报,2010(4):1-2.

[10] 吴跃生. 关于圈 C_{4h} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h})$-冠的优美性[J]. 华东交通大学学报,2011,28(1):77-80.

[11] 吴跃生,李咏秋. 关于图 $\omega_{4,4}$ 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_7)$-冠的优美性[J]. 宜春学院学报,2010,32(12):1-3.

[12] 吴跃生,李咏秋. 关于图 $\omega_{5,7}$ 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{11})$-冠的优美性[J]. 嘉应学院学报,2011,29(5):5-8.

[13] 吴跃生,李咏秋. 关于图 $\omega_{5,6}$ 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{10})$-冠的优美性[J]. 北京联合大学学报,2011,25(2):60-61.

On the Gracefulness of the $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$-Corona of the Cycle C_{4h+3}

WU Yue-sheng[1], LI Yong-qiu[2]

(1. School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;

2. Library, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: A definition has been given of the $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$-corona of the Cycle C_{4h+3}. The gracefulness of the $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$-corona of the Cycle C_{4h+3} are discussed. The graceful labelings are given.

Key words: cycle; corona; graceful graph

(责任编辑 向阳洁)