文章编号: 1007-2985(2010)01-0019-03

随机 Lipschitz 条件下 BSDE 解的连续性质*

宋 丽[1,2]

(1. 山东轻工业学院金融职业学院, 山东 济南 250100; 2. 山东大学数学院, 山东 济南 250100)

摘 要: 论述了在随机 Lipschitz 条件下倒向随机微分方程解的性质. 通过解的先验估计, 分别得到了在随机 Lipschitz 条件下倒向随机微分方程的解关于终端值和生成元的连续性质.

关键词: 随机 Lipschitz 条件; 倒向随机微分方程; 连续性质

中图分类号: O211.63 文献标识码: A

1999 年, 文献[1] 提出了如下形式的倒向随机微分方程(BSDE):

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}B_s \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

在生成元 g 关于变量 y 与 z 是 Lpschitz 的, 终端条件 ξ 与 $(g(t, 0, 0))_{t\in[0,T]}$ 是平方可积的条件下, 证明了此类非线性 BSDE 存在唯一一对适应的平方可积解 $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$. 自此, 许多研究者致力于研究在各种不同条件下 BSDE 解的存在性, 相继取得了令人瞩目的成果.

文献[2] 得到生成元 g 是一致 Lipschitz 连续, ξ 和 $(g(t, 0, 0))_{t\in[0,T]}$ 在 $L^p(p > 1)$ 中时, BSDE(1) 解的存在唯一性. 2003 年文献[3] 扩展了此结果. 但是, 在金融应用中, 要求生成元 g 满足 Lipschitz 条件似乎太强了. 于是人们开始寻求更弱的替代条件. 文献[4] 首先在 1995 年引入随机 Lipschitz 条件下的 BSDE. 文献[5] 证明了在随机 Lipschitz 条件下 BSDE(1) L^2 解的存在唯一性, 并将终端条件推广至无界停时的情形. 文献[6] 扩展了此结论, 得到在随机 Lipschitz 条件下, BSDE(1) $L^p(p > 1)$ 解的存在唯一性. 笔者主要研究在随机 Lipschitz 条件下 BSDE(1) L^2 解的连续性质.

1 预备知识

首先引入一些记号与假设. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$ 是一个概率空间, $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是该空间上的一个 d- 维标准 Brown 运动且 $B_0 = 0$. 设 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是由此 Brown 运动产生的 σ 域流, 即 $\mathscr{F}_t = \sigma\{B_s, 0 \leqslant s \leqslant t\} \vee \mathscr{N}$, 其中 $\mathscr{N}$ 是由所有 P 零测集组成的子集类. 记 $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0} = \sigma\{\bigcup_{t\geqslant 0}\mathscr{F}_t\}$. 对任意正整数 k 和 d, 当 $x, y \in \mathbf{R}^d$, $z \in \mathbf{R}^{k\times d}$, $\langle x, y\rangle$ 表示内积, $|z|^2 = tr(zz^*)$.

令 $(a_t)_{t\geqslant 0}$ 是一个非负 $\mathscr{F}$- 适应过程, 定义如下增过程 $A_t = \int_0^t a_s^2 \mathrm{d}s$. 下面介绍文中用到的随机过程空间. 对实数 $p > 1$, $\beta > 0$; τ 是取值于 $[0, +\infty)$ 的一个停时, 令:

$L^2(\beta, a, \tau, \mathbf{R}^d) = \{\xi: \xi$ 是 $\mathbf{R}^d$ 值的 $\mathscr{F}_\tau$ 可测过程且 $\|\xi\|_\beta^2 = E[e^{\beta A_\tau}|\xi|^2] < \infty\}$;

$\mathscr{H}^2(\beta, a, [0, \tau], \mathbf{R}^{k\times d}) = \{Z: Z$ 是 $\mathbf{R}^{k\times d}$ 值的 $\mathscr{F}_t$ 适应过程且 $\|Z\|_{\mathscr{H}}^2 = E[\int_0^\tau e^{\beta A_t}|Z_t|^2 \mathrm{d}t] < \infty\}$;

$\mathscr{N}^2(\beta, a, [0, \tau], \mathbf{R}^k) = \{Y: Y$ 是 $\mathbf{R}^k$ 值的 $\mathscr{F}_t$ 适应过程且 $\|Y\|_{\mathscr{N}}^2 = E[\int_0^\tau e^{\beta A_t} A_T^2 |Y_t|^2 \mathrm{d}t] < \infty\}$;

$\mathscr{S}^2(\beta, a, [0, \tau], \mathbf{R}^k) = \{Y: Y$ 是 $\mathbf{R}^k$ 值的 $\mathscr{F}_t$ 适应过程且 $\|Y\|_{\mathscr{S}}^2 = E[\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} e^{\beta A_t}|Y_t|^2] < \infty\}$;

$\mathscr{M}^2 = (\mathscr{N}^2(\beta, a, [0, \tau], \mathbf{R}^k) \cap \mathscr{S}^2(\beta, a, [0, \tau], \mathbf{R}^k)) \times \mathscr{H}^2(\beta, a, [0, \tau], \mathbf{R}^{k\times d})$. 对任意的 $(Y, Z) \in \mathscr{M}^2$, 记 (Y, Z) 的范数为 $\|(Y, Z)\|_{\mathscr{M}}^2 = \|Y\|_{\mathscr{N}}^2 + \|Y\|_{\mathscr{S}}^2 + \|Z\|_{\mathscr{H}}^2$ 显然 $\mathscr{M}^2$ 是一个 Banach 空间.

* 收稿日期: 2009-10-12
作者简介: 宋 丽(1979-), 女, 四川新津人, 讲师, 博士研究生, 主要从事金融数学与金融工程研究.

现考虑如下形式的 BSDE:

$$\mathrm{d}Y_t=-g(t,Y_t,Z_t)\mathrm{d}t+Z_t\mathrm{d}B_t\qquad Y_\tau=\xi \tag{2}$$

其中:τ是取值于$[0,+\infty)$的一个停时;生成元g是这样一个函数g,$\Omega\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k\times d}\to\mathbf{R}^d$,对任意$(y,z)\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k\times d}$,$(g(t,y,z))_{t\geqslant 0}$是循序可测过程.

定义 1 $(Y,Z)\in\mathscr{M}^2$称为 BSDE(2)的解,如果

$$Y_{t\wedge\tau}=\xi+\int_{t\wedge\tau}^{\tau}g(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s-\int_{t\wedge\tau}^{\tau}Z_s\mathrm{d}B_s.$$

对 BSDE 的终端条件ξ和生成元g,做如下假设:

(H1) τ是σ域流$\mathscr{F}$上的一个停时,$0\leqslant\tau\leqslant+\infty$;

(H2) (随机 Lipschitz 条件)存在 2 个非负$\mathscr{F}$-适应过程$r(t)$和$u(t)$,满足$\forall(y,z,y',z')\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k\times d}\times\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k\times d}$,有

$$|g(t,y,z)-g(t,y',z')|\leqslant r(t)|y-y'|+u(t)|z-z'|;$$

(H3) $\exists\,\varepsilon>0$,使得$a_t^2=r(t)+u^2(t)\geqslant\varepsilon$;

(H4) $\xi\in L^2(\beta,a,\tau,\mathbf{R}^k)$;

(H5) $\left(\dfrac{g(t,0,0)}{a_t}\right)_{0\leqslant t\leqslant\tau}\in\mathscr{H}^2(\beta,a,[0,\tau],\mathbf{R}^{k\times d})$.

由文献[5]可得如下引理:

引理 1 如果β足够大,条件(H1)至(H5)成立,那么 BSDE(2)存在唯一的适应解$(Y,Z)\in\mathscr{M}^2$.

引理 2 如果β足够大,$(Y,Z)\in\mathscr{M}^2$是 BSDE(2)的解,那么存在仅依赖于β的常数C,使得

$$\|(Y,Z)\|^2_{\mathscr{M}}\leqslant C\left(\|\xi\|^2_\beta+\left\|\frac{g(t,0,0)}{a_t}\right\|^2_{\mathscr{H}}\right).$$

证明 由文献[5]中的引理 5 知,存在常数C_1,C_2,使得

$$\|(Y,Z)\|^2_{\mathscr{M}^2}=\left(\frac{2}{\beta}+C_1+1\right)\left(\|\xi\|^2_\beta+\left(\frac{4}{\beta^2}+\frac{C_2}{\beta}+\frac{2}{\beta}\right)\left\|\frac{g(t,0,0)}{a_t}\right\|^2_{\mathscr{H}}\right). \tag{3}$$

由假设(H2)和(H3),得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{g(t,Y_t,Z_t)}{a_t}\right\|^2_{\mathscr{H}}={}&E\left[\int_0^\tau e^{\beta A_t}\left|\frac{g(t,Y_t,Z_t)}{a_t}\right|^2\mathrm{d}t\right]\leqslant 2E\left[\int_0^\tau e^{\beta A_t}\left(\left|\frac{g(t,Y_t,Z_t)-g(t,0,0)}{a_t}\right|^2+\right.\right.\\&\left.\left.\left|\frac{g(t,0,0)}{a_t}\right|^2\right)\mathrm{d}t\right]\leqslant 2E\left[\int_0^\tau e^{\beta A_t}\frac{(r(t)|Y_t|+u(t)|Z_t|)^2}{a_t^2}\mathrm{d}t+\right.\\&\left.\int_0^\tau e^{\beta A_t}\left|\frac{g(t,0,0)}{a_t}\right|^2\mathrm{d}t\right]\leqslant 4E\left[\int_0^\tau e^{\beta A_t}\frac{r^2(t)|Y_t|^2+u^2(t)|Z_t|^2+|g(t,0,0)|^2}{a_t^2}\mathrm{d}t\right]\leqslant\\&4E\left[\int_0^\tau e^{\beta A_t}\left(a_t^2|Y_t|^2+|Z_t|^2+\left|\frac{g(t,0,0)}{a_t}\right|^2\right)\mathrm{d}t\right]=\\&4\|Y\|^2_{\mathscr{N}}+4\|Z\|^2_{\mathscr{H}}+4\left\|\frac{g(t,0,0)}{a_t}\right\|^2_{\mathscr{H}}\end{aligned} \tag{4}$$

将(4)代入(3)中整理即可得

$$\|(Y,Z)\|^2_{\mathscr{M}}\leqslant C\left(\|\xi\|^2_\beta+\left\|\frac{g(t,0,0)}{a_t}\right\|^2_{\mathscr{H}}\right),$$

其中C仅依赖于β. 证毕.

2 主要结果

现讨论 BSDE(2)解的连续性质.

定理 1 假设$\xi,\xi'\in L^2(\beta,a,\tau,\mathbf{R}^k)$,令$(Y,Z)$,$(Y',Z')$是 BSDE(2)终端条件分别为$\xi,\xi'$时的解,则存在常数$C$,使得

$$\|(Y-Y',Z-Z')\|^2_{\mathscr{M}}\leqslant C\|\xi-\xi'\|^2_\beta.$$

证明 记$\bar{Y}=Y-Y'$,$\bar{Z}=Z-Z'$,$\bar{\xi}=\xi-\xi'$,则$(\bar{Y},\bar{Z})$是下列 BSDE 的解:

$$\mathrm{d}\bar{Y}_t=-\hat{g}(t,\bar{Y}_t,\bar{Z}_t)\mathrm{d}t+\bar{Z}_t\mathrm{d}B_t,\ \bar{Y}_\tau=\bar{\xi}$$

其中 $\hat{g}(t,y,z)=g(t,Y_t,Z_t)-g(t,Y_t-y,Z_t-z)$, 且 $\hat{g}(t,0,0)\equiv 0$. 由引理 2 得, $\|(\hat{Y},\hat{Z})\|_{\mathscr{M}}^2\leqslant C\|\hat{\xi}\|_\beta^2$, 即 $\|(Y-Y',Z-Z')\|_{\mathscr{M}}^2\leqslant C\|\xi-\xi'\|_\beta^2$. 证毕.

定理 2　假设终端条件 ξ,ξ_n, $n=1,2,\cdots$ 和生成元 g 满足 (H1) 至 (H5), 令 $(Y,Z)_{0\leqslant t\leqslant\tau}$ 和 $(Y_t^n,Z_t^n)_{0\leqslant t\leqslant\tau}$ 是 BSDE(2) 相应的解, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\xi_n-\xi\|_\beta^2=0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|(Y_n-Y,Z_n-Z)\|_{\mathscr{M}}^2=0$.

证明　由定理 1 得, 存在常数 C 使得

$$\|(Y_n-Y,Z_n-Z)\|_{\mathscr{M}}^2\leqslant C\|\xi_n-\xi\|_\beta^2.$$

显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|(Y_n-Y,Z_n-Z)\|_{\mathscr{M}}^2=0$. 证毕.

定理 3　假设终端条件 ξ 和生成元 g,g_n 满足 (H1) 至 (H5), $(Y,Z)_{0\leqslant t\leqslant\tau}$ 和 $(Y_t^n,Z_t^n)_{0\leqslant t\leqslant\tau}$ 分别是下列 BSDE 的解:

$$\mathrm{d}Y_t=-g(t,Y_t,Z_t)\mathrm{d}t+Z_t\mathrm{d}B_t,\ Y_\tau=\xi$$

$$\mathrm{d}Y_t^n=-g(t,Y_t^n,Z_t^n)\mathrm{d}t+Z_t^n\mathrm{d}B_t,\ Y_\tau^n=\xi$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\dfrac{g(t,y,z)-G_n(t,y,z)}{a_t}\right\|_\beta^2=0$, 关于 $(y,z)\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k\times d}$ 一致成立, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|(y^n-Y,Z^n-Z)\|_{\mathscr{M}}^2=0$.

证明　记 $\hat{Y}_t^n=Y_t^n-Y_t$, $\hat{Z}_t^n=Z_t^n-Z_t$, $\hat{g}(t,y,z)=g_n(t,y+Y_t,z+Z_t)-g(t,Y_t,Z_t)$, 则 $(\hat{Y}_t^n,\hat{Z}_t^n)_{0\leqslant t\leqslant\tau}$ 是下列方程的解:

$$\mathrm{d}\hat{Y}_t^n=-g(t,\hat{Y}_t^n,\hat{Z}_t^n)\mathrm{d}t+\hat{Z}_t^n\mathrm{d}B_t,\ \hat{Y}_\tau^n=\xi$$

由引理 2 知, 存在一个常数 C, 使得

$$\|(\hat{Y}_t^n,\hat{Z}_t^n)\|_{\mathscr{M}}^2\leqslant C\left\|\frac{\hat{g}(t,0,0)}{a_t}\right\|_{\mathscr{H}}^2=C\left\|\frac{g_n(t,Y_t,Z_t)-g(t,Y_t,Z_t)}{a_t}\right\|_\beta^2,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|(Y^n-Y,Z^n-Z)\|_{\mathscr{M}}^2=0$. 证毕.

参考文献:

[1] PARDOUX E, PENG S. Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation [J]. System and Control Letters, 1990, 14: 55-61.

[2] KAROUI N EL, PENG S G, QUENEZ M C. Backward Stochastic Differential Equation in Finance [J]. Mathematical Finance, 1997, 7(1): 1-77.

[3] BRIAND PH, DELYON B, HU Y, et al. L. Stoica L^p Solutions of Backward Stochastic Differential Equations [J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2003, 108(1): 109-129.

[4] KAROUI N EL, HUANG S-J. A General Result of Existence and Uniquess of Backward Stochastic Differential Equations[M]//Backward Stochastic Differential Equations(Paris, 1995-1996) vol. 364 of Pitman Research Notes in mathematics Series. Longmman, Harlow, London, Uk, 1997: 27-36.

[5] BENDER C, KOHLMANN M. BSDEs with Stochastic Lipschitz Condition [EB/OL]. http://cofe.uni-konstanz.de/papers/dp00-08.pdfpreprint, 2009-06-12.

[6] WANG Jia-jie, RAN Qi-kang, CHEN Qi-hong. L^p Solutions of BSDEs with Stochastic Lipschitz Condition [J]. Joural of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 2007, 1 155(10): 1-14.

Continuous Properties of BSDE with Stochastic Lipschitz Condition

SONG Li[1,2]

(1. School of Finance, Shandong Light Industry School, Ji'nan 250100, China; 2. School of Mathematics, Shandong University, Ji'nan 250100, China)

Abstract: This paper investigates the continuous properties of solutions of backwards stochastic differential equation with stochastic Lipschitz condition. By aprior estimate of solutions, the continuous properties of BSDE are obtained according to terminal data and generator.

Key words: stochastic Lipschitz condition; backward stochastic differential equation; continuous properties

(责任编辑　向阳洁)