第31卷 第1期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 31 No. 1
2010年1月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) Jan. 2010

文章编号: 1007-2985(2010)01-0027-03

"匹配问题"的推广*

李亚兰
(仲恺农业工程学院计算科学系, 广东 广州 510225)

摘 要: 将"匹配问题"的条件加强, 从2个不同角度进行推广, 得到一系列有意义的结果.

关键词: 概率加法公式; 对立事件; 匹配问题
中图分类号: O211.4; O157 文献标识码: A

1 相关引理

"装错信封问题"被著名数学家欧拉(LeonhardEuler, 1707-1783)称为"组合数论的一个妙题". 它是由当时最有名的数学家约翰·伯努利(JohannBernoulli, 1667—1748)的儿子丹尼尔·伯努利(DanidBernoulli, 1700—1782)提出来的, 大意如下: 1个人写了n封不同的信及相应的n个不同的信封, 他把这n封信都装错了信封, 问都装错信封的装法有多少种?由此衍生出概率论的"匹配问题".

文献[1-2]中谈到如下"匹配问题": 某人1次写了n封信, 又写了n个信封, 如果他任意地将n封信装入n个信封中, 则至少有1封信和信封一致的概率是$P(B)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$. 文献[3-6]对上述问题进行了不同角度的推广, 笔者也将对此问题作一些不同的推广.

引理1[1] 将n封信装入n个信封, 无一配对的概率为$P_{0(n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$, 由对立事件概率得

$$P_{0(n)}=1-P(B)=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}. \tag{1}$$

引理2 将n封信装入n个信封, 恰有$r(0\leqslant r\leqslant n)$个信纸与信封配对的概率为

$$P_{r(n)}=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}. \tag{2}$$

证明 因为"某指定r封信纸被装入其配对的信封"的概率为$P_1=\frac{1}{A_n^r}$, "其余$n-r$个信纸与信封无一配对"的概率为$P_2=\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}$, 又这恰好配对的$r$个信纸是$n$个信封中任意的$r$个信纸, 其取法数为$C_n^r$种, 故事件"恰有$r(0\leqslant r\leqslant n)$个信纸与信封配对"是事件"某指定$r$封信纸被装入其配对的信封而其余$n-r$个信纸与信封无一配对"的概率的$C_n^r$倍. 即

$$P_{r(n)}=C_n^rP_1P_2=C_n^r\frac{1}{A_n^r}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

显然, 若$r=0$即为(1)式.

2 主要结果及证明

有n个人各填写1份登记表并交1张照片, 现在将登记表及照片任意地装入n个写有姓名的档案袋中

* 收稿日期: 2009-09-06
基金项目: 仲恺农业工程学院教研资助项目(G2087050)
作者简介: 李亚兰(1964-), 女, 湖北麻城人, 仲恺农业工程学院计算科学系副教授, 硕士, 主要从事大学数学教学与研究.

(每袋只容许装入 1 份登记表及 1 张照片).

定理 1 没有 1 袋的登记表及照片都装对的概率为

$$P_{0(n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{A_n^k}.\tag{3}$$

证明 设 C_i = “第 i 袋中登记表及照片全装对”, $i=1,2,\cdots,n$, 则 B = “至少有 1 袋中登记表及照片全装对” $=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$, 且

$$P(C_i)=\frac{1}{n\cdot n},P(C_iC_j)=\frac{1}{n(n-1)\cdot n(n-1)}\qquad i\neq j,$$

$$P(C_iC_jC_k)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)\cdot n(n-1)(n-2)}\qquad i\neq j\neq k,$$

$$\cdots$$

$$P(C_1C_2\cdots C_n)=\frac{1}{n!\cdot n!}$$

由概率的一般加法公式有

$$P(B)=P(\bigcup_{i=1}^{n}C_i)=\sum_{i=1}^{n}P(C_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(C_iC_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(C_iC_jC_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(C_1C_2\cdots C_n)=$$

$$C_n^1\cdot\frac{1}{n^2}-C_n^2\cdot\frac{1}{n^2(n-1)^2}+\cdots+(-1)^{k-1}C_n^k\cdot\frac{1}{n^2(n-1)^2\cdots(n-k+1)^2}+\cdots+$$

$$(-1)^{n-1}C_n^n\cdot\frac{1}{n!\cdot n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\cdot\frac{1}{A_n^k}.$$

其对立事件“没有 1 袋的登记表及照片都装对”的概率为 $P_{0(n)}=1-P(B)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{A_n^k}$.

定理 2 “恰有 $r(0\leqslant r\leqslant n)$ 袋的登记表及照片都装对”的概率为

$$P_{r(n)}=\frac{1}{r!}\cdot\frac{1}{A_n^r}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{A_{n-r}^k}.\tag{4}$$

证明 由于“某指定 r 袋中的登记表及照片都装对”的概率为 $P_1=\frac{1}{A_n^r\cdot A_n^r}$, “其余 $n-r$ 袋中的登记表及照片无一装对”的概率为 $P_2=\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{A_{n-r}^k}$, 而“恰有 r 袋的登记表及照片都装对”中这 r 袋的取法数为 C_n^r, 因此事件“恰有 r 袋的登记表及照片都装对”的概率是事件“某指定 r 袋中的登记表及照片都装对, 而其余 $n-r$ 袋中的登记表及照片无一装对”的概率的 C_n^r 倍. 即

$$P_{r(n)}=C_n^r\cdot\frac{1}{A_n^r\cdot A_n^r}\cdot\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{A_{n-r}^k}=\frac{1}{r!}\cdot\frac{1}{A_n^r}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{A_{n-r}^k}.$$

显然, 若令 $r=0$ 即为(3) 式.

有 n 个人各填写 m 份不同类的登记表, 现将这些表任意装入 n 个有姓名的袋中(每袋只容许装入 m 份不同的登记表).

定理 3 没有 1 袋的登记表全装对的概率为

$$P_{0(n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{(A_n^k)^{m-1}}.\tag{5}$$

证明 设 C_i = “第 i 袋中登记表全装对”, $i=1,2,\cdots,n$, 则 B = “至少有 1 袋中登记表全装对” $=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$, 且

$$P(C_i)=\frac{1}{n^m},P(C_iC_j)=\frac{1}{n^m(n-1)^m}\qquad i\neq j,$$

$$P(C_iC_jC_k)=\frac{1}{n(n-1)^m(n-2)^m}\qquad i\neq j\neq k,$$

…

$$P(C_1C_2\cdots C_n)=\frac{1}{(n!)^m}.$$

由概率的一般加法公式有

$$P(B)=P(\bigcup_{i=1}^{n}C_i)=\sum_{i=1}^{n}P(C_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(C_iC_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(C_iC_jC_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(C_1C_2\cdots C_n)=$$

$$C_n^1\cdot\frac{1}{n^m}-C_n^2\cdot\frac{1}{n^m(n-1)^m}+\cdots+(-1)^{k-1}C_n^k\cdot\frac{1}{n^m(n-1)^m\cdots(n-k+1)^m}+\cdots+$$

$$(-1)^{n-1}C_n^n\cdot\frac{1}{(n!)^m}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\cdot\frac{1}{(A_n^k)^{m-1}}.$$

其对立事件“没有 1 袋的登记表全装对”的概率为

$$P_{0(n)}=1-P(B)=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\cdot\frac{1}{(A_n^k)^{m-1}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{(A_n^k)^{m-1}}.$$

显然, 若令 $m=2$ 即为(3) 式, 若令 $m=1$ 即为(1) 式, 因此(5) 式包含(1), (3) 式.

定理 4　“恰有 $r(0\leqslant r\leqslant n)$ 袋的登记表全装对”的概率为

$$P_{r(n)}=\frac{1}{r!}\cdot\frac{1}{(A_n^r)^{m-1}}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{(A_{n-r}^k)^{m-1}}.\tag{6}$$

证明　由于“某指定 r 袋中的登记表全装对”的概率为 $P_1=\frac{1}{(A_n^r)^m}$,“其余 $n-r$ 袋中的登记表无一装对”的概率为 $P_2=\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{(A_{n-r}^k)^{m-1}}$, 而“恰有 r 袋的登记表全装对”中这 r 袋的取法数为 C_n^r, 因此事件“恰有 r 袋的登记表全装对”的概率是事件“某指定 r 袋中的登记表全装对, 而其余 $n-r$ 袋中的登记表无一装对”的概率的 C_n^r 倍. 即

$$P_{r(n)}=C_n^r\cdot\frac{1}{(A_n^r)^m}\cdot\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{(A_{n-r}^k)^{m-1}}=\frac{1}{r!}\cdot\frac{1}{(A_n^r)^{m-1}}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{(A_{n-r}^k)^{m-1}}.$$

显然, 若令 $m=2$ 即为(4) 式, 令 $m=1$ 即为(2) 式, 即(6) 式包含(2), (4) 式; 且若令 $r=0$ 即为(5) 式, 因此(6) 式包含(1) ~ (5) 式.

参考文献:

[1]　魏宗舒. 概率论与数理统计教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1983.

[2]　华东师范大学数学系. 概率论与数理统计习题集 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1982.

[3]　郑　翔. 全错位排列问题数学模型的求解及推广 [J]. 高等函授学报, 2005(6): 34– 36.

[4]　全生寅. 一个著名问题的推广 [J]. 青海师范大学学报: 自然科学版, 2003(2): 4– 6.

[5]　颜　书.“装错信封问题”的数学模型的求解及推广 [J]. 数学通报, 2000(6): 35– 36.

[6]　孙存录. 伯努利——欧拉装错信封问题的一种简明解法及推广 [J]. 数学通报, 1987(3): 11– 13.

Generalzation of Matching Problem

LI Ya-lan

(Department of Computation Science, Zhongkai University of Agriculture and Engineering, Guangzhou 510225, China)

Abstract: By increasing the condition, the matching problem is extended from two different perspectives, and then a series of important results were obtained.

Key words: addition formula of probability; mutually inverse events; matching problem

(责任编辑　向阳洁)