文章编号: 1007-2985(2010) 02-0033-04

汇率期权的保险精算定价及均值分析*

张元庆, 刘洪霞
(山东科技大学理学院, 山东 青岛 266510)

摘 要: 基于一个具体的汇率模型, 讨论了汇率期权的定价问题, 综合考虑了利率和购买力以及交割价格对汇率的影响. 利用公平保费原理和价格过程的实际概率测度-保险精算方法给出了汇率期权定价公式, 得到欧式看涨期权和看跌期权精确定价公式及平价公式, 并给出均值的置信区间.

关键词: 公平保费; 期权定价; 汇率
中图分类号: O211.6; F830.9　　文献标识码: A

随着世界经济的全球化发展, 以及东南亚金融危机的深刻教训, 特别是近年来人民币升值的呼声, 外汇及其衍生产品的定价在现代金融理论中越来越受到关注. 传统的期权定价方法都是基于无套利、均衡、完备的市场假设, 利用复制的思想得到, 用复制的思想 Black-Scholes 公式断言[1]: 任何未定权益的价值均可由包含基础证券(股票)和无风险证券(债券) 组成的投资组合精确复制. 换句话说, 购买或出售一个期权的风险可完全被投资组合的收益所对冲, 因此在无套利完备的市场假设下期权的市场价值可由债券和股票的市场价值确定, 但当市场是有套利、非均衡、不完备时, 传统的期权定价方法将无法使用. 1998 年文献[2] 首次提出期权定价的保险精算方法, 其基本思想是: 无风险资产(确定的) 按无风险利率折现, 风险资产(随机的) 按期望收益率折现, 欧式期权的价值等于在期权被执行时股票期末价值按期望收益率折现的现值与执行价(无风险的) 按无风险利率折现的现值之差在股票价格实际概率测度下的数学期望. 与期权定价的鞅方法相比较, 保险精算方法的不同之处在于: 计算数学期望所用的概率测度、期权被执行的条件以及计算可能损失的方式. 在鞅方法下, 欧式看涨期权的价格等于期权被执行时(即股票期末价格大于期权的敲定价), 股票期末价与期权敲定价之差在等价鞅测度下的数学期望. 等价鞅测度即为使股票折现价格过程为鞅的概率测度, 通常不一定是股票价格过程的实际概率测度. 当金融市场是有套利、非均衡(等价鞅测度不存在) 或不完备(等价鞅测度存在但不唯一) 时鞅方法将不能使用. 保险精算方法将期权定价问题转化为等价的公平保费确定问题, 由于无任何经济假设, 因此它不仅对无套利、均衡、完备的市场有效, 且对有套利、非均衡、不完备的市场也有效. 笔者将保险精算方法运用到外汇期权的定价当中, 给出了欧式看涨和看跌期权的解析表达式和平价关系.

1 期权的保险精算定价方法

Mogens bladt 和 Hina Hviid Rydberg 利用公平保费原理将期权定价问题转化为保险问题, 其基本思想是: 买入一份期权, 对方(即此时的期权出售者) 在期权有效期内就会承担一定的潜在风险, 若要为这一风险加上保险, 其保费就是这一期权的价格, 也就是用对方所承受风险的大小来衡量期权价值的大小. 有

* 收稿日期: 2009-06-24
基金项目: 山东科技大学"春雷计划"资助项目(2008AZZ087)
作者简介: 张元庆(1980-), 男, 山东济宁人, 山东科技大学理学院讲师, 主要从事金融数学研究.

关期权保险精算定价的概念沿袭 Mogens Bladt 和 Rydberg.

定义 1　价格过程 $S(t)$ 在 $[0, t]$ 产生的期望收益率 $\int_0^t \beta(s)\,\mathrm{d}s$ 定义为 $\mathrm{e}^{\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s} = \frac{ES(T)}{S}$, 其中 $\beta(t)$ 称为连续复利收益率(股票在 t 时刻的瞬时收益率).

定理 1　欧式汇率看涨期权在现在时刻的价值为: 汇率到期日价格按期望收益率折现的现值与国外债券到期日价格按国外无风险利率折现的现值的乘积, 减去执行价格与国内无风险债券到期日的价格的乘积, 按国内无风险利率折现的现值的差, 在汇率实际分布的概率测度 E 下的数学期望值.

$$C(K,T) = E((\exp\{-\int_0^T \beta(t)\,\mathrm{d}t\}S(T)B_0^f - KB_0^d)I_{\{\exp\{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t\}S(T)B_0^f > KB_0^d\}}),$$

$$P(K,T) = E((KB_0^d - \exp\{-\int_0^T \beta(t)\,\mathrm{d}t\}S(T)B_0^f)I_{\{KB_0^d > \exp\{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t\}S(T)B_0^f\}}).$$

证明　看涨汇率期权执行的充要条件是

$$\exp\{-\int_0^T \beta(t)\,\mathrm{d}t\}S(T)B_T^f \mathrm{e}^{-r^f T} > KB_T^d \mathrm{e}^{-rT},$$

即 $\exp\{-\int_0^T \beta(t)\,\mathrm{d}t\}S(T)B_0^f > KB_0^d$.

从期权发行人的角度讲, 当期权执行者执行期权时, 发行人遭受的相应损失是

$$\exp\{-\int_0^T \beta(t)\,\mathrm{d}t\}S(T)B_0^f - KB_0^d,$$

那么发行人需要支付的公平的保费就应该是这笔损失的期望值, 这也就是该外汇看涨期权的价格.

同理, 可证看跌期权的情况.

2　汇率期权的保险定价公式

Cheung 和 Yeung[3] 在综合考虑利率和购买力对汇率的影响, 建立了以下模型:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = R(t)\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}R(t) = \{-\alpha R(t) - \beta[\ln S(t) - \ln \bar{S}]\}\,\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中: α, β, σ 均为正数; $W(t)$ 为标准布朗运动; $\bar{S}$ 为相对购买力(外币与本币的购买力之比); $S(t)$ 为实际汇率; $R(t)$ 为超值回报率.

模型(1) 以 $R(t)$ 作为研究对象, 而 $R(t)$ 在金融实践中是难以观察到的[4], 在文中, 笔者给出较为直观和易处理的模型, 讨论汇率的保险精算定价问题. 每种货币都有其内在价值, 这可以通过它的购买力反映出来. 如果一种货币的汇率高(低) 于其相对购买力 $\bar{S}$, 那么 $S(t)$ 呈下降(上升) 趋势. 另一方面, 受利益的驱动, 当 $S(t)$ 高于名义汇率时(即 $\ln S(t) > (r_f - r)t$ 时), 投资者将抛售外币, 从而使 $S(t)$ 呈下降趋势; 当 $S(t)$ 低于名义汇率时, $S(t)$ 呈上升趋势. 由于汇率的波动还受到其他随机因素的影响, 因而可以假定

$$\mathrm{d}\ln S(t) = [-\alpha(\ln S(t) - \ln \bar{S}) - \beta(\ln S(t) - (r_f - r)t)]\,\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W(t),$$
$$S(0) = S. \tag{2}$$

国外债券价格 B_t^f 和国内债券价格价格 B_t^d 分别满足方程

$$\mathrm{d}B_t^f = B_t^f r^f\,\mathrm{d}t, B_T^f = 1, \tag{3}$$
$$\mathrm{d}B_t^d = B_t^d r\,\mathrm{d}t, B_T^d = 1. \tag{4}$$

引理 1　方程(1) 的解为 $S(t) = \exp\{-bt - c + \mathrm{e}^{-at}(\ln S + c + \sigma\int_0^t \mathrm{e}^{as}\mathrm{d}W(s))\}$, 其中 $a = \alpha + \beta$, $b = \frac{-\beta(r_f - r)}{\alpha + \beta}$, $c = -\frac{\alpha \ln \bar{S}}{\alpha + \beta} + \frac{\beta(r_f - r)}{(\alpha + \beta)^2}$.

证明　模型(2) 可表示为

$$\mathrm{d}(\ln S(t) - \frac{-\beta(r_f - r)}{\alpha + \beta}t) = [-(\alpha + \beta)(\ln S(t) - \frac{-\beta(r_f - r)}{\alpha + \beta}t - \frac{\alpha \ln \bar{S}}{\alpha + \beta}) - \frac{\beta(r_f - r)}{\alpha + \beta}]\,\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W(t),$$

从而有

$$d\left(\ln S(t)-\frac{\beta(r_f-r)}{\alpha+\beta}t-\frac{\alpha\ln S}{\alpha+\beta}+\frac{\beta(r_f-r)}{(\alpha+\beta)^2}\right)=[-(\alpha+\beta)(\ln S(t)-$$

$$-\frac{-\beta(r_f-r)}{\alpha+\beta}t-\frac{\alpha\ln S}{\alpha+\beta}+\frac{\beta(r_f-r)}{\alpha+\beta})]dt+\sigma dW(t).$$

令 $a=\alpha+\beta$, $b=\frac{-\beta(r_f-r)}{\alpha+\beta}$, $c=-\frac{\alpha\ln S}{\alpha+\beta}+\frac{\beta(r_f-r)}{(\alpha+\beta)^2}$, 则有

$$d(\ln S(t)+bt+c)=[-a(\ln S(t)+bt+c)]dt+\sigma dW(t).$$

由随机微分方程理论[5], 可知

$$\ln S(t)=-bt-c+e^{-at}\left(\ln S+c+\sigma\int_0^T e^{as}dW(s)\right),$$

即 $S(t)=\exp\{-bt-c+e^{-at}(\ln S+c+\sigma\int_0^T e^{as}dW(s))\}$.

定理 2　假使汇率价格过程满足(1) 式, 则:

$$C(k,T)=\exp\{-\int_0^T\beta(t)dt-(b+r^f)T-c+e^{-aT}(\ln S+c)+\frac{\lambda^2e^{-2aT}\sigma^2}{2}\}N(d_1)-Ke^{-rT}N(d_2),$$

$$P(k,T)=Ke^{-rT}N(-d_2)-\exp\{-\int_0^T\beta(t)dt-(b+r^f)T-c+e^{-aT}(\ln S+c)+\frac{\lambda^2e^{-2aT}\sigma^2}{2}\}N(-d_1),$$

$$C(k,T)+Ke^{-rT}=P(k,T)+\exp\{-\int_0^T\beta(t)dt-(b+r^f)T-c+e^{-aT}(\ln S+c)+\frac{\lambda^2e^{-2aT}\sigma^2}{2}\}.$$

其中: $d_1=\frac{\ln S+c-(bT+c+\ln K+(r_f-r)T+\int_0^T\beta(t)dt)e^{aT}+\lambda^2e^{-aT}\sigma^2}{\sigma\lambda}$; $d_2=d_1-\sigma\lambda e^{-aT}$; $\lambda=\sqrt{\int_0^T e^{2as}ds}$; $N(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

证明　$\exp\{-\int_0^T\beta(t)dt\}S(T)B_0^f>KB_0^d$, 等价于

$$\int_0^T e^{as}dw(s)>\frac{(bT+c+\ln\frac{KB_0^d}{B_0^f}+\int_0^T\beta(t)dt)e^{aT}-\ln S-c}{\sigma},$$

其中 $\int_0^T e^{as}dw(s)\sim N(0,\int_0^T e^{2as}ds)$.

令

$$y=\frac{(bT+c+\ln\frac{KB_0^d}{B_0^f}+\int_0^T\beta(t)dt)e^{aT}-\ln S-c}{\sigma},\ \lambda=\sqrt{\int_0^T e^{2as}ds},$$

$$E((\exp\{-\int_0^T\beta(t)dt\}S(T)B_0^f)I_{\{\exp\{-\int_0^T\beta(t)dt\}S(T)B_0^f>KB_0^d\}})=B_0^f\exp\{-\int_0^T\beta(t)dt\}\exp\{-bT-c+e^{-aT}(\ln S+c)\}\cdot$$

$$\exp\{\frac{\lambda^2e^{-2aT}\sigma^2}{2}\}\int_y^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda}\exp\{-\frac{(x-\lambda^2e^{-aT}\sigma)^2}{2\lambda^2}\}dx=B_0^f\exp\{-\int_0^T\beta(t)dt-$$

$$bT-c+e^{-aT}(\ln S+c)+\frac{\lambda^2e^{-2aT}\sigma^2}{2}\}N(d_1),$$

其中

$$d_1=\frac{\ln S+c-(bT+c+\ln\frac{KB_0^d}{B_0^f}+\int_0^T\beta(t)dt)e^{aT}+\lambda^2e^{-aT}\sigma^2}{\sigma\lambda}=\frac{\ln S+c-}{\sigma\lambda}\rightarrow$$

$$\leftarrow\frac{(bT+c+\ln K+(r_f-r)T+\int_0^T\beta(t)dt)e^{aT}+\lambda^2e^{-aT}\sigma^2}{\sigma\lambda}.$$

同理:

$$E(KB_0^d I_{\{\exp\{-\int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t\}S(T)B_0^f > KB_0^d\}}) = KB_0^d\int_y^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda}\exp\{-\frac{x^2}{2\lambda^2}\}\mathrm{d}x =$$

$$KB_0^d k\int_{y/\lambda}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{t^2}{2}\}\mathrm{d}t = KB_0^d N(d_2),$$

其中 $d_2 = \dfrac{\ln S + c - (bT + c + \ln K + (r_f - r)T + \int_0^T \beta(t)\mathrm{d}t)\mathrm{e}^{aT}}{\sigma\lambda} = d_1 - \sigma\lambda\mathrm{e}^{-aT}$.

同理可证其他 2 式.

3 汇率期权均衡价格的置信区间

由 $\ln S(t) = -bt - c + \mathrm{e}^{-a}(\ln S + c + \sigma\int_0^T \mathrm{e}^{as}\mathrm{d}W(s))$, 而 $\int_0^T \mathrm{e}^{as}\mathrm{d}W(s) \sim N(0, \int_0^T \mathrm{e}^{2as}\mathrm{d}s)$, 从而有 $E\ln S(t) = -bt - c + \mathrm{e}^{-at}(\ln S + c) = u(t)$, $\mathrm{Var}\ln S(t) = \sigma^2\mathrm{e}^{-2at}\int_0^T \mathrm{e}^{2as}\mathrm{d}s = F(t)$, $\ln S(t) \sim N(u(t), F(t))$.

假设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体的一个样本, 记 $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - X)^2$, 又 $\frac{X - u(t)}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, 其右边的分布 $t(n-1)$ 不依赖于任何参数, 由此可得

$$P\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{X - u(t)}{S/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = 1 - \alpha$$

所以, $u(t)$ 的置信度 $1-\alpha$ 置信区间为

$$(X - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), X + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)).$$

参考文献:

[1] BLACK F, SCHOLES M. The Pricing of Option and Corporate Liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-659.

[2] BLADT M, RYDBERG T H. An Actuartial Approach to Option Pricing Under the Physical Measure and Without Market Assumptions [J]. Insurance Mathematics and Economics, 1998, 22(1): 65-73.

[3] PHILI PROTTER. A Partial Introduction to Financial Asset Pricing Theory [J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2001, 91: 169-203.

[4] CHEUNG M T, YEUNG D. A Non Random Walk Theory of Exchange Rate Dynamics with Applications to Option Pricing [J]. Stochastic Analysis and Their Applications, 1994, 12: 141-157.

[5] 黄志远. 随机分析学基础 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1998.

Actuarial Approach to Exchange Rate Option Pricing

ZHANG Yuan-qing, LIU Hong-xia
(College of Sciences, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, China)

Abstract: The problem of exchange rate option pricing is discussed based on concrete exchange rate model. The effect of interest rate, purchasing power and account pring on exchange rate is considened. Using physical probability measure of price process and the principle of fair premium, and by an actuarial approach, the authors obtain the accurate pricing formula and put-call parity of European call and put option. The confidence interval of mean value is also obtained.

Key words: fair premium; option pricing; exchange rate

(责任编辑 向阳洁)