第 31 卷　第 2 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 31　No. 2
2010 年 3 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Mar. 2010

文章编号: 1007-2985(2010)02-0010-05

从贝努利不等式到 Hölder 不等式的演变过程及应用*

邢家省, 王洪志
(北京航空航天大学数学与系统科学学院, 数学、信息与行为教育部重点实验室, 北京　100191)

摘　要: 首先利用贝努利不等式给出几何平均算术平均不等式的证明, 然后给出 Young 不等式和 Young 逆不等式的初等证明方法, 进而给出 Hölder 不等式的初等证明, 并将这些结果应用到一些重要不等式的证明.

关键词: 贝努利不等式; 几何平均算术平均不等式; Young 不等式; Hölder 不等式; Minkowski 不等式
中图分类号: O177.2　　文献标识码: A

贝努利不等式是最常见的不等式, 在初等数学阶段就引述了贝努利不等式[1-4], 然而此不等式的重要性没有被人们所认识. 笔者利用贝努利不等式给出了几何平均算术平均不等式的证明, 然后给出了 Young 不等式的初等证明, 进而给出了 Hölder 不等式的初等化证明, 表明这些不等式都可经贝努利不等式演变而来. 经过给出这些不等式的初等化的证明, 可使这些不等式就能在初等数学阶段中给予介绍, 有利于传播和使用, 并能揭示相关结果的本质所在.

1　从贝努利不等式到几何平均算术平均不等式的过程

定理 1[1-4] (贝努利不等式)　设 $n \geqslant 2$, 实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都大于 -1, 并且它们都有相同的符号, 则成立 $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) > 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$. 特别地, 当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x>-1$, 且 $x \neq 0$, 成立 $(1+x)^n > 1+nx\ (x>-1, x\neq 0)$.

定理 2[2-4]　(1) 设 $a, b \geqslant 0$, 对任一正整数 n, 成立

$$ab^{n-1} \leqslant \frac{1}{n}a^n + \frac{n-1}{n}b^n; \tag{1}$$

(2) 对任意 $x, y \geqslant 0$, 对任一正整数 $n \geqslant 2$, 成立

$$xy \leqslant \frac{1}{n}x^n + \frac{n-1}{n}y^{\frac{n}{n-1}}. \tag{2}$$

证明　(1) 不妨设 $a, b > 0$. 由 $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, 得 $y^n \geqslant 1+n(y-1)\ (y>0)$. 取 $y=\frac{a}{b}$, 得 $a^n \geqslant b^n - nb^{n-1}(b-a)$, 从而 $ab^{n-1} \leqslant \frac{1}{n}a^n + \frac{n-1}{n}b^n$.

(2) 在(1)式中取 $a=x, b=y^{\frac{1}{n-1}}$, 即得到成立 $xy \leqslant \frac{1}{n}x^n + \frac{n-1}{n}y^{\frac{n}{n-1}}$.

定理 3[2-8] (几何平均值-算术平均值不等式)　对任意 $n(n \geqslant 2)$ 个非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 成立

* 收稿日期: 2009-12-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771011)
作者简介: 邢家省(1964-), 男, 河南泌阳人, 北京航空航天大学数学与系统科学学院副教授, 主要从事偏微分方程研究.

$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, 等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

证明　利用贝努利不等式, 多次套用定理 2 中的不等式(2), 得

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=x_n^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}x_n+\frac{n-1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

定理 4　对任意 $n(n\geqslant2)$ 个非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 成立

$$x_1x_2\cdots x_n\leqslant\frac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n}{n},\ x_1x_2\cdots+x_n\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n,$$

$$x_1x_2\cdots x_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)\leqslant x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+\cdots+x_n^{n+1}.$$

直接利用分解因式, 有如下的欧拉恒等式[1,9]:

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3-3y_1y_2y_3=(y_1+y_2+y_3)\frac{1}{2}[(y_1-y_2)^2+(y_1-y_3)^2+(y_2-y_3)^2].$$

从而, 当 $y_1+y_2+y_3\geqslant0$ 时, 成立 $y_1^3+y_2^3+y_3^3\geqslant3y_1y_2y_3$. 对任意实数 $x_1,x_2,x_3\geqslant0$, 成立 $\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\leqslant\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $x_1x_2<\frac{1}{3}x_1^3+\frac{2}{3}x_2^{3/2}$.

2　从几何平均算术平均不等式到 Young 不等式与 Young 逆不等式的过程

定理 5[2-8] (Young 不等式)　(1) 对任意 $a,b\geqslant0$, 有理数 $0<s<1$, 成立 $a^sb^{1-s}\leqslant sa+(1-s)b$;

(2) 对任意 $x,y\geqslant0$, 有理数 $r>1$, 成立 Young 不等式 $xy\leqslant\frac{1}{r}x^r+\left(1-\frac{1}{r}\right)y^{\frac{r}{r-1}}$;

(3) 对任意 $n(n\geqslant2)$ 个非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 有理数 $p_1,p_2,\cdots,p_n>1$, 且 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1$, 则成立 $x_1x_2\cdots x_n\leqslant\frac{1}{p_1}x_1^{p_1}+\frac{1}{p_2}x_2^{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}x_n^{p_n}$.

证明　(1) 存在正整数 m,n, 使得 $1\leqslant m<n$, $s=\frac{m}{n}$. 利用几何平均算术平均不等式, 得 $a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{n-m}{n}}\leqslant\frac{m}{n}a+\frac{n-m}{n}b$, 即 $a^sb^{1-s}\leqslant sa+(1-s)b$.

(2) 存在正整数 m,n, 使得 $1\leqslant m<n$, $r=\frac{n}{m}$. 利用几何平均算术平均不等式, 得 $xy\leqslant\frac{m}{n}x^{\frac{n}{m}}+\frac{n-m}{n}y^{\frac{n}{n-m}}$, 即 $xy\leqslant\frac{1}{r}x^r+\left(1-\frac{1}{r}\right)y^{\frac{r}{r-1}}$.

(3) 利用(2) 的结果和归纳法, 即可给出(3) 的证明.

定理 6[2-4,8] (Young 逆不等式)　对任意 $x,y>0$, 有理数 $0<q<1$, 成立不等式 $xy\geqslant\frac{1}{q}x^q+\left(1-\frac{1}{q}\right)y^{\frac{q}{q-1}}$.

证明　利用 Young 不等式 $a^qb^{1-q}\leqslant qa+(1-q)b$, 得

$$\frac{1}{q}x^q=\frac{1}{q}\left[(xy)^q\left(y^{\frac{-q}{1-q}}\right)^{1-q}\right]\leqslant\frac{1}{q}\left[qxy+(1-q)y^{\frac{q}{q-1}}\right]=xy-\left(1-\frac{1}{q}\right)y^{\frac{q}{q-1}},$$

即证得 $xy\geqslant\frac{1}{q}x^q+\left(1-\frac{1}{q}\right)y^{\frac{q}{q-1}}$.

3　从 Young 不等式到 Hölder 不等式的过程

定理 7[2-4,8,10] (Hölder 不等式)　对任意实数 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,k)$, 有理数 $r>1$, 则

$$\sum_{i=1}^{k}|a_ib_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{i=1}^{k}|b_i|^{\frac{r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}}.$$

证明 不妨设$(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^r)^{\frac{1}{r}}, (\sum_{i=1}^{k}|b_i|^{\frac{r}{r-1}})^{\frac{r-1}{r}}>0$, 在Young不等式$xy\leqslant\frac{1}{r}x^r+(1-\frac{1}{r})y^{\frac{r}{r-1}}$中, 取$x=\frac{|a_i|}{(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^r)^{\frac{1}{r}}}$, $y=\frac{|b_i|}{(\sum_{i=1}^{k}|b_i|^{\frac{r}{r-1}})^{\frac{r-1}{r}}}(i=1,2,\cdots,k)$, 然后对$i=1,2,\cdots,k$求和, 就得Hölder不等式.

利用Hölder不等式, 即可证明如下的结论:

定理8[2-4] (Minkowski不等式) 对任意实数$a_i, b_i(i=1,2,\cdots,k)$, 有理数$r\geqslant 1$, 成立

$$(\sum_{i=1}^{k}|a_i+b_i|^r)^{\frac{1}{r}}\leqslant(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^r)^{\frac{1}{r}}+(\sum_{i=1}^{k}|b_i|^r)^{\frac{1}{r}}.$$

定理9[2-4] 设正整数$n\geqslant 2$, 有理数$p_i>1(i=1,2,\cdots,n)$, 且$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1$, 对任意实数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$, 成立

$$|\sum_{j=1}^{m}a_{1j}a_{2j}\cdots a_{nj}|\leqslant(\sum_{j=1}^{m}|a_{1j}|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}(\sum_{j=1}^{m}|a_{2j}|^{p_2})^{\frac{1}{p_2}}\cdots(\sum_{j=1}^{m}|a_{nj}|^{p_n})^{\frac{1}{p_n}}.$$

定理10[2,4] 设正整数$n\geqslant 2$, 实数$a_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$, 则有:

(1) $(1+(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}})^n\leqslant(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$(Chrystal不等式);

(2) $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\leqslant(1+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^n$.

证明 (1) 直接利用Hölder不等式的推论, 得到$(1+(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}})=1\cdot 1\cdots 1+(a_1^{\frac{1}{n}})(a_2^{\frac{1}{n}})\cdots(a_n^{\frac{1}{n}})\leqslant(1+a_1)^{\frac{1}{n}}(1+a_2)^{\frac{1}{n}}\cdots(1+a_n)^{\frac{1}{n}}$, 即结果得证.

(2) 直接利用几何算术平均不等式, 即可得到证明.

例1[2,4] 设$a_1,a_2>0$, 且$a_1+a_2=1$, 则成立$\frac{1+a_1}{1-a_1}\cdot\frac{1+a_2}{1-a_2}\geqslant 3^2$.

证明 $\frac{1+a_1}{1-a_1}\cdot\frac{1+a_2}{1-a_2}=\frac{2a_1+a_2}{a_2}\cdot\frac{a_1+2a_2}{a_1}=\frac{2a_1^2+2a_2^2+5a_1a_2}{a_1a_2}\geqslant\frac{4a_1a_2+5a_1a_2}{a_1a_2}=9=3^2$.

例2[2,4] 设$a_1,a_2,a_3>0$, 且$a_1+a_2+a_3=1$, 则成立$\frac{1+a_1}{1-a_1}\cdot\frac{1+a_2}{1-a_2}\cdot\frac{1+a_3}{1-a_3}\geqslant 2^3$.

证明 $\frac{1+a_1}{1-a_1}\cdot\frac{1+a_2}{1-a_2}\cdot\frac{1+a_3}{1-a_3}=\frac{(a_1+a_2)+(a_1+a_3)}{a_2+a_3}\cdot\frac{(a_1+a_2)+(a_2+a_3)}{a_1+a_3}\cdot\frac{(a_1+a_3)+(a_2+a_3)}{a_1+a_2}\geqslant$

$$\frac{2\sqrt{(a_1+a_2)(a_1+a_3)}}{a_2+a_3}\cdot\frac{2\sqrt{(a_1+a_2)(a_2+a_3)}}{a_1+a_3}\cdot\frac{2\sqrt{(a_1+a_3)(a_2+a_3)}}{a_1+a_2}\geqslant 2^3,$$

即结果成立.

例3[2-3] 设$x,y\geqslant 0$, 且$x^3+y^3=1$, 求$x+y$的变化范围.

解 利用定理7的结果, 得$x+y\leqslant(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}(1+1)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$. 再由$(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}\leqslant x+y$, 得出$1\leqslant x+y\leqslant 2^{\frac{2}{3}}$.

例4[2] 设$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, 求$(\sin x)^3+(\cos x)^3$的取值范围.

解 由$1=(\sin x)^2+(\cos x)^2\leqslant[(\sin x)^3+(\cos x)^3]^{\frac{2}{3}}(1+1)^{\frac{1}{3}}$, 得$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant(\sin x)^3+(\cos x)^3$. 再由$[(\sin x)^3+(\cos x)^3]^{\frac{1}{3}}\leqslant[(\sin x)^2+(\cos x)^2]^{\frac{1}{2}}=1$, 得出$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant(\sin x)^3+(\cos x)^3\leqslant 1$.

例5[4] 若x,y,z为满足$x^2+y^2+z^2=8$的正数, 则成立$x^3+y^3+z^3\geqslant 16\sqrt{\frac{2}{3}}$.

定理11[2,4] (Newman不等式) 设正整数$n\geqslant 2$, 实数$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, 且$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$, 则有$\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i}$

$-1)\geqslant(n-1)^n$.

证明　由于 $\frac{1}{a_i}-1=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{a_i}-1=\frac{\sum_{k\neq i}a_k}{a_i}\geqslant\frac{(n-1)(\prod_{k\neq i}a_k)^{1/(n-1)}}{a_i}$, 因此 $\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i}-1)\geqslant(n-1)^n$.

定理 12[2,4] (Klamkin 不等式)　设正整数 $n\geqslant 2$, 实数 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, 且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$, 则有: (1) $\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{a_i})\geqslant(n+1)^n$; (2) $\prod_{i=1}^{n}(\frac{1+a_i}{1-a_i})\geqslant(\frac{n+1}{n-1})^n$.

证明　(1) 由 $\frac{1}{a_k}+1=\frac{a_k+\sum_{i=1}^{n}a_i}{a_k}\geqslant\frac{(n+1)(a_k\prod_{i=1}^{n}a_i)^{1/(n+1)}}{a_k}$, 得 $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{a_k})\geqslant(1+n)^n$.

(2) 考虑函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}[\ln(1+x_k)-\ln(1-x_k)]$, 在 $\sum_{i=1}^{n}x_i-1=0, x_k>0(k=1,2,\cdots,n)$ 下的条件极值, 即可获证.

定理 13[4]　若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数, 又 $\alpha<0<\beta$, 则成立

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

定理 14[3-4] 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数, 则有 $\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$.

定理 15[4]　若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数, α,β 为有理数, 且 $\alpha<\beta$, 则

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant\left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证明　当 $0<\alpha<\beta$ 时, 利用 Hölder 不等式,

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^\alpha\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^\beta}{n}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{\alpha}{\beta}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^\beta}{n}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{\alpha}{\beta}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^\beta}{n}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}},$$

于是 $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. 当 $\alpha<\beta<0$ 时, 此时 $0<-\beta<-\alpha$, 利用上一步的结果, 得 $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i^{-1})^{-\beta}}{n}\right)^{\frac{1}{(-\beta)}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i^{-1})^{-\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{(-\alpha)}}$, 由此即得结果. 当 $\alpha<0<\beta$ 时, 结果显然成立. 当 $0\leqslant\alpha<\beta$ 或 $\alpha<\beta\leqslant 0$ 时, 综合上面的情况, 即得结果.

从 Young 逆不等式出发, 还可给出 Hölder 逆不等式、Minkowski 逆不等式.

4　Jensen 不等式及其应用

定理 16[2,4,10]　对任意实数 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$, 正实数 $p>q>0$, 成立 $\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

证明　由 $|a_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}(i=1,2,\cdots,k)$, 得

$$\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^p\right)=\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q|a_i|^{p-q}\right)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\right)\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\right)^{\frac{p}{q}-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\right)^{\frac{p}{q}},$$

从而得到 $\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

例 6　设 $a_1,a_2,a_3>0$, 则 $(a_1^3+a_2^3+a_3^3)^{\frac{1}{3}}<(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}$.

证明　显然,

$$a_k<(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}\qquad k=1,2,3,$$

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3=a_1^2a_1+a_2^2a_2+a_3^2a_3<(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{3}{2}},$$

结果得证.

此不等式及证明的几何意义是明显的.

定理 17[2,4] 对任何 $x, y > 0$, 正实数 $p > q > 0$, 成立 $(x^p + y^p)^{\frac{1}{p}} < (x^q + y^q)^{\frac{1}{q}}$. 特别地, $(x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}} < (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 < (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3$. 对复数 $z = x + yi$, 成立 $(|x|^3 + |y|^3)^{\frac{1}{3}} \leqslant |z| = (|x|^2 + |y|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (|x|^3 + |y|^3)^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{6}}$. 设 $x, y > 0$, 对 $p > 1$, 成立 $(x^p + y^p)^{\frac{1}{p}} < x + y$, $x^p + y^p < (x + y)^p$, $|x - y|^p \leqslant |x^p - y^p|$; 对 $0 < p < 1$, 成立 $(x^p + y^p)^{\frac{1}{p}} > x + y$, $(x + y)^p < x^p + y^p$, $|x^p - y^p| \leqslant |x - y|^p$.

定理 18[2,4] (Dresden 不等式) (1) 设 $p \geqslant 1$, 对任意实数 u, v, 成立 $|(|u| - |v|)|^p \leqslant |(|u|^p - |v|^p)|$; (2) 设 $0 < p < 1$, 对任意实数 u, v, 成立 $|(|u|^p - |v|^p)| \leqslant |u - v|^p$.

定理 19[2,4,10] 设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$, k 为有限正整数或为 $+\infty$, 记 $\|a\|_p = (\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $0 < p < +\infty$, $\|a\|_\infty = \sup\{|a_i| : i = 1, 2, \cdots, k\}$, 则:

(1) 成立 $\|a\|_\infty \leqslant \|a\|_p$, $0 < p < +\infty$;

(2) 设 $p > q > 0$, 成立 $\|a\|_p \leqslant \|a\|_q$, $\|a\|_\infty \leqslant \|a\|_p \leqslant (\|a\|_\infty)^{1-\frac{q}{p}} (\|a\|_q)^{\frac{q}{p}}$;

(3) 设对某 $q > 0$, 有 $\|a\|_q < +\infty$, 则 $\lim_{p \to +\infty} \|a\|_p = \|a\|_\infty$.

参考文献:

[1] 华罗庚. 高等数学引论(第 1 册) [M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[2] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 长沙: 湖南教育出版社, 1989.

[3] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[4] 徐利治, 王兴华. 数学分析的方法及例题选讲 [M]. 修订版. 北京: 高等教育出版社, 1984.

[5] 邢家省, 张愿章, 陶鹏飞. 几何算术平均不等式的初等证明与应用 [J]. 河南科学, 2007, 25(3): 353-357.

[6] 邢家省, 付传玲, 郭秀兰. 贝努利不等式的应用 [J]. 河南科学, 2008, 26(2): 138-142.

[7] 邢家省, 郭秀兰, 崔玉英. 几个幂次不等式的应用 [J]. 河南科学, 2008, 26(11): 1 306-1 309.

[8] 邢家省, 郭秀兰, 朱建设. Hölder 不等式的初等证明及其应用 [J]. 河南科学, 2009, 27(12): 1 484-1 488.

[9] 李尚志. 线性代数 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[10] 苗长兴. 调和分析及其在偏微分方程中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

Development from Bernoulli Inequality to Hölder Inequality and Its Applications

XING Jia-sheng, WANG Hong-zhi

(Department of Mathematics, LMIB of the Ministry of Education, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: This paper presents the proof of geometric mean and arithmetic mean inequality by Bernoulli inequality. Then it gives the proof of Young inequality and gets the elementary proof of Hölder inequality. And some important inequalities can be proved by those results.

Key words: Bernoulli's inequality; geometric mean and arithmetic mean inequality; Young's inequality; Hölder inequality; Minkowski inequality

(责任编辑 向阳洁)