文章编号: 1007-2985(2010) 03-0024-02

不定方程 $y^2=x^3+4$ 解的存在性*

周泽文

(玉林师范学院数学与计算机科学系, 广西 玉林 537000)

摘 要: 引入 2 个引理, 证明了不定方程 $y^2=x^3+4$ 没有正整数解.

关键词: 不定方程; 解; 存在性

中图分类号: O151.1 文献标志码: A

形如 $y^2=x^3+k(k\in\mathbf{N})$ 的方程是一类非常有趣的不定方程, 对于每一个不同的正整数 k, 方程的解的确定, 一般来说都是非常艰难的, 即使能求解, 其方法也是不尽相同的. 例如在初等数论中已经知道不定方程 $y^2=x^3+7$ 没有整数解. 笔者利用初等方法来分析讨论不定方程 $y^2=x^3+4$ 的解的情况.

1 引理及证明

引理 1 不定方程 $x(x+1)=4y^3$ 没有正整数解.

证明 显然, $(x,x+1)=1$, 从而 4 或 y^3 必定仅属于 x 或 $x+1$ 其中一个因子, 从而有:

(ⅰ) $x=4a, x+1=by^3$, 则有 $ab=1$, 于是 $a=b=1$, 从而 $x=4, x+1=y^3$. 故 $y^3=5$, 而这是不可能的.

(ⅱ) $x=by^3, x+1=4a$, 则有 $ab=1$, 于是 $a=b=1$, 从而 $x+1=4, x=y^3$. 故 $x=3, y^3=3$, 而这是不可能的.

综合可知引理 1 成立.

引理 2 不定方程 $(4b+1)[(4b+1)+4]=(4a+1)^3$ 没有正整数解.

证明 显然, $(4b+1)$ 与 $(4b+5)$ 没有公因子. 否则, 可设 $4b+1=mp, 4b+5=mq$, 这里 $m,p,q\in\mathbf{N}$, 故有 $m(p-q)=4$.

由于 $(4b+1)$ 与 $(4b+5)$ 都是奇数, 因此只有可能为 $m=1$, 从而知 $(4b+1)$ 与 $(4b+5)$ 没有公因子.

由上面的分析, 可设 $4b+1=m^3, 4b+5=n^3$, 从而有 $n^3-m^3=4$, 即

$$(n-m)(n^2+mn+m^2)=4. \tag{1}$$

显然, $n^2+mn+m^2>4(m\neq n)$, 故知(1) 式无解, 从而知方程无正整数解.

从引理 2 的证明过程中不难得到如下结论:

推论 1 对于任意 $a\in\mathbf{N}$, 均有 $(4a+1,4a+5)=1$.

* 收稿日期: 2010-03-15
作者简介: 周泽文(1961-), 男, 广西玉林人, 玉林师范学院数学与计算机科学系副教授, 主要从事基础数学教学与数论研究.

2　关于不定方程 $y^2 = x^3 + 4$

对于不定方程 $y^2 = x^3 + 4$, 若有解, 则解 (x, y) 中的 x 与 y 的结构必定具有如下形式之一: $4a, 4a+1, 4a+2, 4a+3$.

由上面的分析不难知道, 若有解, 则不定方程 $y^2 = x^3 + 4$ 的解 (x, y) 的可能仅为如下 16 种形式: (a) $(4a, 4b)$; (b) $(4a, 4b+1)$; (c) $(4a, 4b+2)$; (d) $(4a, 4b+3)$; (e) $(4a+1, 4b)$; (f) $(4a+1, 4b+1)$; (g) $(4a+1, 4b+2)$; (h) $(4a+1, 4b+3)$; (i) $(4a+2, 4b)$; (j) $(4a+2, 4b+1)$; (k) $(4a+2, 4b+2)$; (l) $(4a+2, 4b+3)$; (m) $(4a+3, 4b)$; (n) $(4a+3, 4b+1)$; (o) $(4a+3, 4b+2)$; (p) $(4a+3, 4b+3)$.

下面对于上述各种可能分析进行讨论:

(ⅰ) 对于(a), (b), (d), (e), (f), (g), (i), (j), (k), (l), (m), (n), (o), (p) 等这 14 种情况, 利用整数的奇偶性, 不难知道它们都不可能成为方程的解; 故只需对(c), (h) 进行讨论.

(ⅱ) 对于形式(c), 若 $(x, y) = (4a, 4b+2)$, 则有 $(4b+2)^2 = 64a^3 + 4 \Leftrightarrow b(b+1) = 4a^3$. 由引理 1 知, 这是不可能的, 故知方程无这样结构的解.

(ⅲ) 对于形式(h), 若 $(x, y) = (4a+1, 4b+3)$, 则有 $(4b+3)^2 = (4a+1)^3 + 4$, 从而有

$$(4b+1)[(4b+1)+4] = (4a+1)^3. \tag{2}$$

由引理 2 知(2) 式无解, 从而方程无这样结构的解.

综合上面的分析与讨论可得如下结论:

定理 1　不定方程 $y^2 = x^3 + 4$ 没有正整数解.

参考文献:

[1] 盖伊 R K. 数论中未解决的问题 [M]. 第 1 版. 北京: 科学出版社, 2003.

[2] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论 [M]. 第 2 版. 北京: 北京大社出版社, 1992.

[3] 王世强. 正整数方程能用初等方法求解吗 [J]. 数学通报, 2006(5): 1-2.

Existence of the Solution to Diophantine Equation $y^2 = x^3 + 4$

ZHOU Ze-wen

(Department of Mathematics and Computer Science, Yulin Teachers' College, Yulin 537000, Guangxi China)

Abstract: Two lemmas are used to prove that there is no positive integer solution to the diophantine equation $y^2 = x^3 + 4$.

Key words: diophantine equation; solution; existence

(责任编辑　向阳洁)