第 31 卷 第 3 期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 31 No. 3
2010 年 5 月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) May 2010

文章编号: 1007-2985(2010) 03-0015-06

含参数四阶奇异微分方程边值问题正解存在性*

刘 倩[1], 孙钦福[1], 欧阳金刚[2]

(1. 曲阜师范大学数学科学学院, 山东 曲阜 273165; 2. 山东理工职业学院, 山东 济宁 272017)

摘 要: 考察一类含有 2 个参数的非线性奇异四阶微分方程边值问题正解的存在性, 其中允许非线性项 $f(t,x,y)$ 在 $x=0$, $y=0$ 处奇异. 它运用的主要工具是锥拉伸压缩不动点定理. 通过限制 λ 的范围, 得到边值问题正解的存在性.

关键词: 奇异边值问题; 正解; 锥; 不动点定理; 紧算子

中图分类号: O175 文献标志码: A

1 问题的提出

考察一类含有 2 个参数的非线性奇异四阶微分方程 2 点边值问题正解的存在性:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+\beta u''(t)-\alpha u(t)=\lambda\varphi(t)f(t,u(t),u''(t)) & 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $\lambda>0$; $\varphi(t)\in C((0,1),\mathbf{R}^+)$ 在 $t=0$, $t=1$ 处奇异且在 $(0,1)$ 的任一子区间上不恒为 0, 这里 $\mathbf{R}^+=[0,+\infty)$; 非线性项 $f(t,x,y)\in C([0,1]\times(0,+\infty)\times(-\infty,0),\mathbf{R}^+)$ 且允许 f 在 $x=0$, $y=0$ 处奇异; α, β 是 2 个参数, 且满足 $\beta<2\pi^2$, $\alpha\geqslant-\beta^2/4$, $\alpha/\pi^4+\beta/\pi^2<1$. 这里边值问题(简写为 BVP) (1) 的正解是指 $u\in C^2(0,1)\cap C[0,1]$ 满足(1) 且 $u(t)$ 在 $(0,1)$ 上不恒为 0.

当 $\alpha=\beta=0$ 时, 相关边值问题的正解及非平凡解的存在性与多解性都获得了广泛的研究[1-4]. 当 $\alpha=0$, $\beta\neq0$ 时, 文献[5] 用混合单调算子的不动点定理讨论了下列四阶边值问题正解的存在性:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+\beta u''(t)=\lambda f(t,u(t)) & 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0. \end{cases}$$

其中: $\lambda>0$; $\beta<\pi^2$; $f(t,x)\in C((0,1)\times(0,+\infty),(0,+\infty))$.

而对于一般情况, 相关问题正解的工作并不多见. 文献[6] 考察了非奇异的半正简单弹性梁的变形问题正解的存在性:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+\beta u''(t)-\alpha u(t)=f(t,u(t),u''(t)) & 0<t<1, \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0, \end{cases}$$

其中非线性项是连续的. 笔者考察了非线性项关于第 2、第 3 个变元均奇异的边值问题正解的存在性.

文中使用的主要工具是著名的 Guo-Krasnoselskii 锥拉伸压缩不动点定理:

命题 1[7] 设 E 是一个 Banach 空间, K 是 E 中的一个锥. 假设 Ω_1 和 Ω_2 是 E 中的开集且满足 $0\in\Omega_1$ 和 $\Omega_1\subseteq\Omega_2$. 设 $T: K\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)\rightarrow K$ 是全连续算子. 如果满足如下条件之一, 那么 T 在 $K\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)$ 中至少有 1 个不动点:

* 收稿日期: 2010-01-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771117); 山东省自然科学基金资助项目(Y2007A23)
作者简介: 刘 倩(1985-), 女, 曲阜师范大学数学科学学院在读硕士, 主要从事非线性泛函分析研究; 孙钦福(1967-), 男, 山东高密人, 曲阜师范大学副教授, 硕士, 主要从事非线性泛函分析研究.

(i) $\|Tu\| \leqslant \|u\|,\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$ 和 $\|Tu\| \geqslant \|u\|,\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$;

(ii) $\|Tu\| \leqslant \|u\|,\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$ 和 $\|Tu\| \geqslant \|u\|,\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$.

2 引理及预备知识

令 $E = \{x \in C^2[0,1]: x(0) = x(1) = x''(0) = x''(1) = 0\}$. 在 E 中定义范数

$$\|x\|_2 = \|x''\| = \max_{t\in[0,1]} \|x''(t)\| \qquad \forall x \in E,$$

则 $(E, \|\cdot\|_2)$ 是 Banach 空间, 且容易验证 $\|x\| \leqslant \|x'\| \leqslant \|x''\|,\ \forall x \in E$.

设 d_1, d_2 为多项式 $P(x) = x^2 + \beta x - \alpha$ 的 2 个根, 即

$$d_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}}{2},\quad d_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}}{2},$$

由参数满足的条件可得 $-\pi^2 < d_1 \leqslant d_2$. 令 $G_i(t,s)\ (i = 1,2)$ 是齐次线性问题 $-u''(t) + d_i u(t) = 0\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 在边界条件 $u(0) = u(1) = 0$ 下的 Green 函数. 记 $a_i = \sqrt{|d_i|}$, 则 $G_i(t,s)$ 有如下精确表达式[6]:

$$G_i(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_i \sin a_i}\begin{cases} \sin a_i t \sin a_i(1-s) & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \\ \sin a_i s \sin a_i(1-t) & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} & d_i > 0; \\ \begin{cases} t(1-s) & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \\ s(1-t) & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} & d_i = 0; \\ \dfrac{1}{a_i \sinh a_i}\begin{cases} \sinh a_i t \sinh a_i(1-s) & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \\ \sinh a_i s \sinh a_i(1-t) & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} & -\pi^2 < d_i < 0. \end{cases}$$

显然有 $G_i(t,s) > 0,\ \forall t,s \in (0,1)$, 且 $G_i(t,s) = G_i(s,t)\ (i = 1,2)$.

由此还可以看出, BVP(1) 在 $C^4(0,1)$ 中有解当且仅当积分方程

$$u(t) = \lambda\int_0^1\int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \qquad t \in (0,1)$$

在 $C^2(0,1)$ 中有解.

为了证明主要结论, 需要下列记号和引理, 记:

$$q_i(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 a_i}{a_i^2}\min\{t, 1-t\} & -\pi^2 < d_i < -\dfrac{1}{4}\pi^2, \\ \min\{t, 1-t\} & -\dfrac{1}{4}\pi^2 \leqslant d_i \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\sinh a_i}\min\{\sinh a_i t, \sinh a_i(1-t)\} & d_i > 0; \end{cases}$$

$$H_i(t) = \begin{cases} \dfrac{a_i}{\sin a_i} t(1-t) & -\pi^2 < d_i < -\dfrac{1}{4}\pi^2, \\ \dfrac{\sin a_i t \sin a_i(1-t)}{a_i \sin a_i} & -\dfrac{1}{4}\pi^2 \leqslant d_i < 0, \\ t(1-t) & d_i = 0, \\ \dfrac{\sinh a_i t \sinh a_i(1-t)}{a_i \sinh a_i} & d_i > 0; \end{cases}$$

$$M_1 = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G_1(t,\tau)\int_0^1 G_2(\tau,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau;$$

$$M_2 = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s;\ m = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_\delta^{1-\delta} G_2(t,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$

引理 1[6] $q_i(t)H_i(s) \leqslant G_i(t,s) \leqslant H_i(s),\ 0 \leqslant t, s \leqslant 1$.

令

$$P = \{u \in E: u(t) \geqslant q_1(t)\|u\|,\ -u''(t) \geqslant q_3(t)\|u\|_2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\},$$

其中 $q_3(t) = \min\{q_1(t), q_2(t)\}$, 易证 P 是 E 中的一个锥. 对 $\forall u \in p\backslash\{\theta\},\ 0 \leqslant t \leqslant 1$, 有 $u(t) \geqslant q_1(t)\|u\|$, $-u''(t) \geqslant q_3(t)\|u\|_2$. 此外, 再由

$$u(t)=\int_0^1 J(t,s)u''(s)\,\mathrm{d}s,\ J(t,s)=\begin{cases} t(1-s) & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ s(1-t) & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

可知 $u(t)\geqslant\int_0^1 J(t,s)q_3(s)\,\mathrm{d}s\,\|u\|_2,\ 0\leqslant t\leqslant 1$. 因此可得

$$\|u\|\geqslant\|u\|_2\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 J(t,s)q_3(s)\,\mathrm{d}s\geqslant\|u\|_2\int_0^1 J\left(\frac{1}{2},s\right)q_3(s)\,\mathrm{d}s.$$

取 $r_0=\int_0^1 J\left(\frac{1}{2},s\right)q_3(s)\,\mathrm{d}s>0$, 则有 $\|u\|\geqslant r_0\|u\|_2$. 因而对 $\forall u\in P\backslash\{\theta\},\ 0\leqslant t\leqslant 1$, 有

$$r_0q_1(t)\|u\|_2\leqslant u(t)\leqslant\|u\|_2,\ -\|u\|_2\leqslant u''(t)\leqslant -q_3(t)\|u\|_2. \tag{2}$$

根据(2) 式可知, 假设 BVP(1) 存在解 $u\in P\backslash\{\theta\}$, 则 u 是 BVP(1) 的正解.

文中通篇采用以下假设:

(H_1) $\alpha<0,\beta<0$ 不同时发生;

(H_2) $\varphi\in C((0,1),\mathbf{R}^+)$ 且 $0<\int_0^1\varphi(s)\,\mathrm{d}s<+\infty$;

(H_3) $f(t,u,v)=g(t,u)+h(t,v)$, 其中 $g(t,u):[0,1]\times(0,+\infty)\to\mathbf{R}^+$ 连续且关于第 2 个变元非增, $h(t,v):[0,1]\times(-\infty,0)\to\mathbf{R}^+$ 连续且关于第 2 个变元非减. 此外, 对任意的常数 $r>0$,

$$0<\int_0^1\varphi(s)g(s,rq_1(s))\,\mathrm{d}s<+\infty,\ 0<\int_0^1\varphi(s)h(s,-rq_3(s))\,\mathrm{d}s<+\infty.$$

现对 $\forall R>r>0$, 定义积分算子 $T:P_{r,R}\to E$ 为

$$(Tu)(t)=\lambda\int_0^1\int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\qquad t\in[0,1],$$

其中 $P_{r,R}=\{u\in P:r<\|u\|_2<R\}$.

引理 2　假设(H_1) 至(H_3) 成立, 则 $T:P_{r,R}\to P$ 是全连续算子.

证明　首先需要证明 $T:P_{r,R}\to E$ 有定义且 $T(P_{r,R})\subset P$. 事实上, $\forall u\in P\backslash\{\theta\},\ 0\leqslant t\leqslant 1$, 由(2) 式知

$$r_0q_1(t)\|u\|_2\leqslant u(t)\leqslant\|u\|_2,\ -\|u\|_2\leqslant u''(t)\leqslant -q_3(t)\|u\|_2.$$

再根据条件(H_3) 可得

$$\begin{aligned}&\lambda\int_0^1\int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\leqslant\lambda\int_0^1 H_1(\tau)\int_0^1 H_2(s)\varphi(s)(g(s,u(s))+\\&h(s,u''(s)))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\leqslant\lambda\Big(\int_0^1 H_1(\tau)\int_0^1 H_2(s)\varphi(s)g(s,r_0rq_1(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+\\&\int_0^1 H_1(\tau)\int_0^1 H_2(s)\varphi(s)h(s,-rq_3(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\Big)<+\infty.\end{aligned}$$

即 Tu 是有定义的. 再对 $\forall u\in P\backslash\{\theta\},\ 0\leqslant t\leqslant 1$, 由引理 1 知

$$\begin{aligned}(Tu)(t)&\geqslant\lambda q_1(t)\int_0^1 H_1(\tau)\int_0^1 G_2(\tau,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\geqslant\\&q_1(t)\lambda\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\geqslant\\&q_1(t)\|Tu\|.\end{aligned}$$

条件(H_1) 保证了 $-\pi^2<d_1\leqslant 0$, 则

$$\begin{aligned}\|Tu\|_2&=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}[-(Tu)''(t)]=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left[-d_1(Tu)(t)+\lambda\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\,\mathrm{d}s\right]\leqslant\\&-d_1\|Tu\|+\lambda\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}-(Tu)''(t)&=-d_1(Tu)(t)+\lambda\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\,\mathrm{d}s\geqslant -d_1q_1(t)\|Tu\|+\\&q_2(t)\lambda\int_0^1 H_2(s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\,\mathrm{d}s\geqslant q_3(t)(-d_1\|Tu\|)+\end{aligned}$$

$$q_3(t)\lambda\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s\geqslant q_3(t)(-d_1\|Tu\|+$$

$$\lambda\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s)\geqslant q_3(t)\|Tu\|_2.$$

由此可知 $T(P_{r,R})\subset P$.

下证 $T:P_{r,R}\to P$ 是全连续的. 先说明 T 是紧的, 设 B 是 $P_{r,R}$ 中的有界集, 则对任意的 $u\in B$, 有 $u\in P, r\leqslant\|u\|_2\leqslant R$. 因此由(2)式可得, 对 $\forall s\in[0,1]$, 有

$$r_0rq_1(s)\leqslant u(s)\leqslant R,\ -R\leqslant u''(s)\leqslant -q_3(s)r.$$

容易验证 $T(B)$ 是一致有界的. 为了证明 $T(B)$ 是相对紧的, 只需证明 $\{(Tu)''(t):u\in B\}$ 是等度连续的. 由 $G_i(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续性知, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $s\in[0,1]$, $t_1,t_2\in[0,1]$ 且 $|t_1-t_2|<\delta$ 时, 有 $|G_i(t_1,s)-G_i(t_2,s)|<\varepsilon$. 再由条件($H_3$)可知, 对 $\forall u\in B$, $\forall t_1,t_2\in[0,1]$ 且 $|t_1-t_2|<\delta$ 时, 有

$$|(Tu)(t_1)-(Tu)(t_2)|\leqslant\lambda\int_0^1|G_1(t_1,\tau)-G_1(t_2,\tau)|\int_0^1 G_2(\tau,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$\lambda\int_0^1|G_1(t_1,\tau)-G_1(t_2,\tau)|\int_0^1 G_2(\tau,s)\varphi(s)(g(s,u)+h(s,u''))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$\lambda\varepsilon(\int_0^1 H_2(s)\varphi(s)g(s,r_0rq_1(s))\mathrm{d}s+\int_0^1 H_2(s)\varphi(s)h(s,-rq_3(s))\mathrm{d}s),$$

从而有

$$|(Tu)''(t_1)-(Tu)''(t_2)|\leqslant -d_1|(Tu)(t_1)-(Tu)(t_2)|+\lambda\int_0^1|G_2(t_1,s)-G_2(t_2,s)|\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$q-d_1|(Tu)(t_1)-(Tu)(t_2)|+\lambda\int_0^1|G_2(t_1,s)-G_2(t_2,s)|\varphi(s)(g(s,u)+h(s,u''))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$-d_1|(Tu)(t_1)-(Tu)(t_2)|+\lambda\varepsilon(\int_0^1\varphi(s)g(s,r_0rq_1(s))\mathrm{d}s+\int_0^1\varphi(s)h(s,-rq_3(s))\mathrm{d}s)$$

$$<-d_1\lambda\varepsilon(\int_0^1 H_2(s)\varphi(s)g(s,r_0rq_1(s))\mathrm{d}s+\int_0^1 H_2(s)\varphi(s)h(s,-rq_3(s))\mathrm{d}s)+$$

$$\lambda\varepsilon(\int_0^1 H_2(s)\varphi(s)g(s,r_0rq_1(s))\mathrm{d}s+\int_0^1 H_2(s)\varphi(s)h(s,-rq_3(s))\mathrm{d}s).$$

故 $\{(Tu)''(t):u\in B\}$ 是等度连续的, 因此 $T:P_{r,R}\to P$ 是紧的. 再说明 T 是连续的. 取 $u_m,u_0\in P_{r,R}$ 且 $\|u_m-u_0\|_2\to 0$, 则 $\|u_m-u_0\|\to 0$, $\|u''_m-u''_0\|\to 0$, 即 $m\to\infty$ 时, 有 $\{u_m(t)\}$ 和 $\{u''_m(t)\}$ 在 $t\in[0,1]$ 上分别一致收敛于 $u_0(t)$ 和 $u''_0(t)$. 对任意的 $t\in[0,1]$, 由 f 的连续性可知,

$$|f(t,u_m(t),u_m''(t))-f(t,u_0(t),u_0''(t))|\to 0.$$

再由 Lebesgue 控制收敛定理和条件(H_1), 可知

$$\|Tu_m-Tu_0\|\leqslant\lambda\int_0^1 H_1(\tau)\int_0^1 H_2(s)\varphi(s)|f(t,u_m(t),u_m''(t))-$$
$$f(t,u_0(t),u_0''(t))|\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\to 0\qquad m\to\infty,$$

$$\|Tu_m-Tu_0\|_2\leqslant -d_1\|Tu_m-Tu_0\|+\lambda\int_0^1 H_2(s)\varphi(s)|f(t,u_m(t),u_m''(t))-$$
$$f(t,u_0(t),u_0''(t))|\mathrm{d}s\to 0\qquad m\to\infty.$$

综上可知, $T:P_{r,R}\to P$ 是全连续算子. 证毕.

3 主要结果

定理1 假设(H_1)至(H_3)成立. 若还有如下条件成立, 则对任意的 $\lambda\in(\frac{1}{mg_\infty},[(-d_1M_1+M_2)(g^0+h^0)]^{-1})$, BVP(1)至少存在1个正解:

(H_4) $0\leqslant g^0=\lim\limits_{x\to 0^+}\sup\sup\limits_{t\in[0,1]}\frac{g(t,x)}{x}<+\infty$, $0\leqslant h^0=\lim\limits_{-y\to 0^+}\sup\sup\limits_{t\in[0,1]}\frac{h(t,y)}{y}<+\infty$;

(H_5) $0 < g_\infty = \lim_{x\to+\infty}\inf\inf_{t\in[0,1]}\frac{g(t,x)}{x} < +\infty$.

证明　假设 λ满足定理 1 中要求. 取 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $g_\infty - \varepsilon_0 > 0$, 且

$$\frac{1}{m(g_\infty-\varepsilon_0)} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{(-d_1M_1+M_2)(g^0+h^0+2\varepsilon_0)}.$$

由条件(H_4) 知, 存在 $r > 0$ 使得

$$g(t,x) \leqslant (g^0+\varepsilon_0)x \qquad 0 < x \leqslant r,\ t\in(0,1), \tag{3}$$

$$h(t,y) \leqslant -(h^0+\varepsilon_0)y \qquad 0 < -y \leqslant r,\ t\in(0,1). \tag{4}$$

取 $P_r = \{u\in P: \|u\|_2 < r\}$, 则对 $\forall u\in\partial P_r$, 由(3), (4) 式可知,

$$\|Tu\| = \lambda\max_{0\leqslant t\leqslant1}\int_0^1 G_1(t,\tau)\int_0^1 G_2(\tau,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \leqslant$$
$$\lambda\max_{0\leqslant t\leqslant1}\int_0^1 G_1(t,\tau)\int_0^1 G_2(\tau,s)\varphi(s)[g(s,u(s))+$$
$$h(s,u''(s))]\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \leqslant \lambda M_1(g^0+h^0+2\varepsilon_0)r.$$

$$\|Tu\|_2 = \max_{0\leqslant t\leqslant1}[-d_1(Tu)(t)+\lambda\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s] \leqslant -d_1\|Tu\|+$$
$$\lambda\max_{0\leqslant t\leqslant1}\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(s)[g(s,u(s))+h(s,u''(s))]\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\lambda(-d_1M_1+M_2)(g^0+h^0+2\varepsilon_0)r \leqslant r = \|u\|_2.$$

因此,

$$\|Tu\|_2 \leqslant \|u\|_2 \qquad \forall u\in\partial P_r. \tag{5}$$

另一方面, 由条件(H_5) 可知, 存在 $R^* > 0$, 使得

$$g(t,x) \geqslant (g_\infty-\varepsilon_0)x \qquad x\geqslant R^*,\ t\in[0,1].$$

取 $R = \min\{r_0^{-1}R^*, R^*\}$, 则当 $u\in P$ 且 $\|u\|_2 = R$ 时,

$$\|Tu\|_2 = \max_{0\leqslant t\leqslant1}[-d_1(Tu)(t)+\lambda\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(s)f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s] \geqslant$$
$$\lambda\max_{0\leqslant t\leqslant1}\int_0^1 G_2(t,s)\varphi(s)g(s,u(s))\mathrm{d}s \geqslant$$
$$\lambda m(g_\infty-\varepsilon_0)R \geqslant R = \|u\|_2.$$

因而,

$$\|Tu\|_2 \geqslant \|u\|_2 \qquad \forall u\in\partial P_R. \tag{6}$$

根据(5), (6) 式并应用定理 1 可知, 算子 T 在 $P_{r,R}$ 中有不动点, 即 BVP(1) 至少存在 1 个正解. 证毕.

类似的, 还可以证明如下结论:

定理 2　假设(H_1) 至(H_3) 成立. 若还有如下条件成立, 则对任意的 $\lambda\in\left(\frac{1}{mg_0}, [(-d_1M_1+M_2)(g^\infty+h^\infty)]^{-1}\right)$, BVP(1) 至少存在 1 个正解:

(H_6) $0 \leqslant g^\infty = \lim_{x\to+\infty}\sup\sup_{t\in[0,1]}\frac{g(t,x)}{x} < +\infty$, $0 \leqslant h^\infty = \lim_{-y\to+\infty}\sup\sup_{t\in[0,1]}\frac{h(t,y)}{-y} < +\infty$;

(H_7) $0 < g_0 = \lim_{x\to0}\inf\inf_{t\in[0,1]}\frac{g(t,x)}{x} < +\infty$.

参考文献:

[1] YAO Q. Existence of n Solutions and Positive Solutions to a Semipositone Elastic Beam Equation [J]. Nonlinear Anal., 2007, 66: 138-150.

[2] LIU B. Positive Solutions of Fourth-Order Two-Point Boundary Value Problems [J]. Appl. Math. Comput., 2004, 148: 407-420.

[3] BAI Z, WANG H. On Positive Solutions of Some Nonlinear Fourth-Order Beam Equations [J]. J. Math. Anal. Appl., 2002, 270: 357-368.

[4] MA H. Symmetric Positive Solutions for Nonlocal Boundary Value Problems of Fourth Order [J]. Nonlinear Anal., 2008, 68: 645-651.

[5] LIN X, JIANG D, LI X. Existence and Uniqueness of Solutions for Singular Fourth-Order Boundary Value Problems [J]. J. Comput. Appl. Math., 2006, 196: 155-161.

[6] 姚庆六. 一类含参数半正四阶边值问题的正解的存在性与多样性 [J]. 数学学报, 2008, 51(2): 401-410.

[7] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 第 2 版. 济南: 山东科技出版社, 2000.

Existence of Positive Solutions to Singular Fourth-Order Boundary Value Problems with Two Parameters

LIU Qian[1], SUN Qin-fu[1], OUYANG Jin-gang[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu 273165, Shandong China; 2. Vocational College, Shandong institute of Technology, Jining 272017, Shandong China)

Abstract: The existence of positive solutions to singular fourth-order boundary value problems with two parameters is considered, where the nonlinear term $f(t, x, y)$ may be singular at $x = 0$, $y = 0$. The main tool is the fixed point theorem in cone. When λ lies in certain range, the boundary value problem in question has at least one positive solution.

Key words: singular boundary value problem; positive solutions; cone; fixed point theorem; compact operator

(责任编辑 向阳洁)

(上接第 9 页)

[5] 毕 宁, 黄达人, 戴青云, 等. 一类含参数的正交对称四进小波构造 [J]. 计算数学, 2005, 27(2): 141-150.

[6] 彭立中, 王永革. 具有优美结构的紧支正交小波的构造 [J]. 中国科学(E 辑): 技术科学, 2004, 34(2): 200-210.

[7] NGUYEN T Q, VAIDYANATHAN P P. Maximally Decimated Perfect-Reconstruction FIR Filter Banks with Pairwise Mirror-Image Analysis and Synthesis Frequency Responses [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1998, 36(5): 693-706.

[8] LIAN J-A. Orthogonality Criteria for Multi-Scaling Functions [J]. Appl. Comput. Harmon. Anal., 1998(5): 277-311.

[9] HELLER P. Rank M Wavelets with N Vanishing Moments [J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1995, 16: 502-519.

Construction of a Class of Wavelet Matrix with Special Structure

QUAN Hong-yue, SU Juan

(Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: The authors define a new operation between homotype matrixes. Applying the operation to orthonomal wavelet matrix, a method is obtained for constructing a class of orthononal wavelet matrix with special structure, i. e., a class of M-band wavelet symtem with especial property.

Key words: multi-band wavelets; orthogonal wavelet matrix; two-scale symbol; pair-wise symmetric; elegancy wavelet

(责任编辑 向阳洁)