

文章编号: 1007-2985(2010) 03-0064-04

基于拓扑图电路理论的行星轮系运动学特性分析*

吴 敏, 赵荣辉

(岳阳职业技术学院, 湖南 岳阳 414000)

摘 要: 应用基尔霍夫定律建立了基于拓扑图的行星轮系数学模型, 即回路方程组和切割方程组, 分析并解决了行星轮系运动学的相关问题.

关键词: 拓扑图; 基尔霍夫定律; 行星轮系; 运动特性

中图分类号: TN401

文献标志码: A

1 轮系拓扑图

根据行星轮系的结构特点^[1-2], 可将如图 1 所示行星轮系的结构图按构件功能分为太阳轮、行星轮、定轴齿轮、系杆(转臂)、转轴等, 并以实心点表示齿轮, 小方框表示系杆, 省略表示转轴. 对于构件之间的联系, 以粗实线表示齿轮副, 细实线表示系杆与行星齿轮构成回转副, 虚线表示系杆与齿轮固定联结. 为了简便地表达轮系, 系杆在太阳轮轴线上形成的回转副省略, 这样就形成了行星轮系拓扑图, 如图 2 所示.

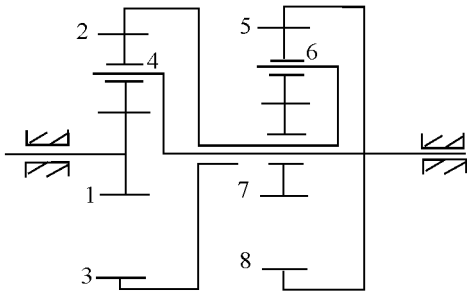


图 1 轮系结构

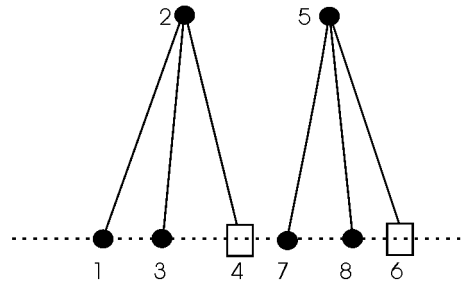


图 2 轮系拓扑

2 轮系和基尔霍夫定律的关系

将行星轮系转化为定轴轮系来分析, 以 1 个典型的 2K-H 行星轮系为例(后面的证明和分析均以此为例). 轮系结构图和拓扑图如 3, 4 所示.

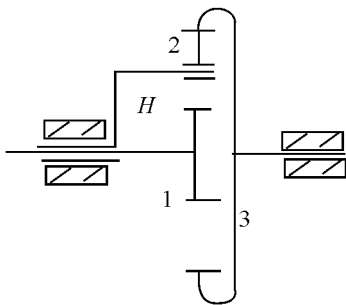


图 3 轮系结构

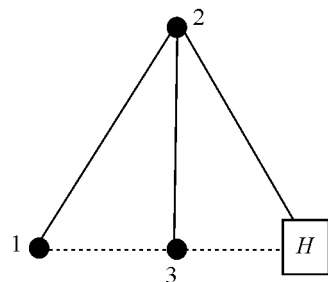


图 4 轮系拓扑

* 收稿日期: 2010-03-10

基金项目: 湖南省科技厅科学研究项目(2009SK3151)

作者简介: 吴 敏(1964-), 男, 湖南常德人, 岳阳职业技术学院副教授, 主要从事机电一体化技术、职业教育理论研究; 赵荣辉(1966-), 女, 湖南岳阳人, 岳阳职业技术学院副教授, 主要从事机械设计与制造、职业教育理论研究.

根据相对运动原理^[3], 机构中每个构件相对于转臂 H 的角速度为

$$\omega_1^H = \omega_1 - \omega_H, \omega_2^H = \omega_2 - \omega_H, \omega_3^H = \omega_3 - \omega_H, \omega_H^H = \omega_H - \omega_H = 0,$$

相对应的角速度比应为

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H}, i_{12}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_2^H}.$$

由此可以得知, 行星齿轮传动中任意构件 1 和 2 相对于构件 H 运动时的角速度之比为

$$i_{12}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_2^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H}, \tag{1}$$

同理, 构件 1 和 H 相对于构件 2 运动的角速度之比为

$$i_{1H}^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_H^2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_H - \omega_2}, \tag{2}$$

将(1), (2) 式等号两边相加, 则可得到 $i_{12}^H + i_{1H}^2 = 1$, 化简得

$$\omega_1^2 + \omega_1^H + \omega_H^2 = 0, \tag{3}$$

同理可得

$$\omega_3^2 + \omega_3^H + \omega_H^2 = 0. \tag{4}$$

由图4可以看出, 该拓扑图有 2 个基本回路, 分别为回路 2-1- H 和回路 2-3- H . 在这 2 个回路中它们角速度的变化值满足了(3), (4) 式, 即在回路中角速度的变化值为 0. 这恰好对应基尔霍夫电压定理^[4], 即对电路的任一回路, 在任一时刻, 沿着该回路的所有支路电压降的代数和为 0. 由此找到行星轮系(电路) 角速度(电压) 相对应的关系.

若不考虑摩擦力和传动效率, 在行星齿轮传动转矩平衡时, 作用在行星轮系 3 个基本构件上的外转矩代数和为 0^[5], 且它们所传递的功率代数和也为 0. 对于图 4, 齿轮 1 和齿轮 3 作为系统的输入, 系杆 H 为系统的输出, 则 $M_1 + M_3 + M_H = 0, P_1 + P_3 + P_H = 0$, 即中间轮 2(可看作电路中的输入、输出分界节点) 力矩的代数和为 0. 对于行星轮系中其余独立构件: 输入构件, 外界的输入就等于该构件的输出; 输出构件, 该构件所有的输入就是构件的输出. 这恰好对应基尔霍夫电流定理(任一电路中, 在任一时刻, 对于 1 个节点, 流进或流出该节点的所有支路电流的代数和为 0). 独立构件和中间轮都可以看成一节点.

3 运用电路理论分析轮系运动特性

3.1 构建基于拓扑图电路理论

1 个电网络是 1 个有向图 G , 根据电路理论可知: 1 个有向图 G 应满足基尔霍夫电压定律, 即

$$\mathbf{B}_a \mathbf{V}(s) = \mathbf{0}, \tag{5}$$

其中: $\mathbf{V}(s)$ 是表示各边电压的矢量, 即 G 的支路电压矢量; \mathbf{B}_a 是回路即边关联矩阵.

3.2 建立行星轮系数学模型

设有向图 G 的边关联矩阵(回路矩阵) 用符号 \mathbf{B}_a 来表示, 它是 1 个 $p \times b$ 阶矩阵, 其中 p 是 G 中的回路数, 设 $\mathbf{B}_a = (b_{ij})$, 则 $b_{ij} = 1$ (边 e_j 在回路 i 中且回路和边的方向一致); $b_{ij} = -1$ (边 e_j 在回路 i 中且回路和边的方向相反); $b_{ij} = 0$ (边 e_j 不在回路中).

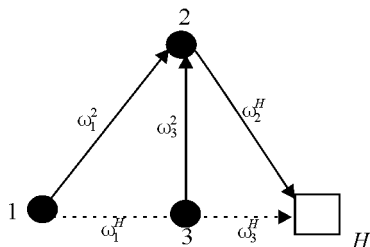


图 5 轮系传动拓扑

\mathbf{B}_a 是基尔霍夫电压方程的系数矩阵, 不包括仅改变方向得到的回路, 其原因是改变方向仅仅改变 \mathbf{B}_a 中某一行的符号.

基于拓扑图研究轮系运动特性, 赋予线的权值为相邻构件角速度差值矢量, 拓扑图中箭头方向视为行星轮系机构运动传递方向. 取拓扑图中各线权值为箭头起始点角速度矢量减去终点角速度矢量, 形成的轮系传动拓扑图如图 5 所示, 由传动拓扑图

写出的线权值数学表达式, 即为传动矩阵.

根据相对角速度和电路理论中的电压对应的关系,把轮系传动拓扑图看做一棵树,处于同轴位置的齿轮和系杆的连接称为这棵树的连支,规定连支的方向为传动回路的方向.由基尔霍夫电压定律可知,与(5)式相对应的相对角速度矢量可表示为

$$\mathbf{B}_a \boldsymbol{\omega}'_{ij} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_5^2 \\ \omega_5^H \\ \omega_2^H \\ \omega_1^H \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

其中: \mathbf{B}_a 表示边关联矩阵,对应传动拓扑图; ω_{ij} 表示各边角速度矢量.由于角速度的求解最后都是通过齿轮的齿数来进行计算的,则 ω_{ij}' 矢量可以转化为齿数矩阵和某些特定的角速度矢量来表示,若由齿数表示出来的矩阵 \mathbf{C}_a 表示为传动矩阵,则(6)式就可以表示为

$$\mathbf{B}_a \mathbf{C}_a \boldsymbol{\omega}_{ij} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

其中: \mathbf{C}_a 是根据常用的计算传动比公式推导出的传动矩阵; ω_{ij} 为传动拓扑图中连支矢量.则由图 5 表示的传动拓扑图对应的矩阵可表示为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{Z_3}{Z_2} \\ 0 & 1 \\ -\frac{Z_1}{2Z_2} & \frac{Z_3}{2Z_3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^H \\ \omega_5^H \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

3.3 运用电路理论分析轮系中的力矩

基尔霍夫电流定律表示为

$$\mathbf{Q}_f \mathbf{I}(t) = \mathbf{0}, \quad (10)$$

其中支路电流矢量 $\mathbf{I}(t)$ 表示 G 中边的电流 $i(t)$ 的矢量.

设有向图 G 的割集矩阵是 1 个 $q \times b$ 阶的矩阵,用符号 $\mathbf{Q}_a = |q_{ij}|$ 表示,且 q 是 G 中非空切割数,则 $q_{ij} = 1$ (边 e_j 在切割 i 中且其方向与切割方向一致); $q_{ij} = -1$ (边 e_j 在切割 i 中但其方向与切割方向相反); $q_{ij} = 0$ (边 e_j 不在切割之中).

对于 1 个连通有向图 G ,它的割集矩阵用符号 \mathbf{Q} 表示, G 的边编号方式是使 \mathbf{Q}_f 的最后 r 列对应于树 t 中的树支.同时如果按编号重新整理 \mathbf{Q}_f 的行和列,该割集矩阵 \mathbf{Q}_f 能够分块为 $\mathbf{Q}_f = | \mathbf{Q}_{11} \mathbf{U}_r |$,其中 \mathbf{U}_r 是秩为 r 的单位矩阵.

利用基尔霍夫电流定律来计算时,公式的形式会略有改变,但是表达的依据还是依靠基尔霍夫电流定律.在利用拓扑图来计算电流的时候,割集矩阵 \mathbf{Q}_f 作为基尔霍夫电流的系数矩阵, $\mathbf{I}(t)$ 矢量来表示电流矢量.在利用这一性质时,同样把割集矩阵 \mathbf{Q}_f 作为力矩的系数矩阵,由于电路拓扑图和轮系拓扑图表示有一些不同之处,则在表示力矩矢量的时候也就有所不同,用 \mathbf{M}_0 来表示输出力矩,用 \mathbf{M}_1 来表示力矩的输入矢量, \mathbf{M}_1 是各个独立构件的力矩,则非独立构件的力矩一律用零矢量来表示,输入等于输出.则和基尔霍夫电流定律的公式表达式(10)相对应的力矩公式则为

$$\mathbf{Q}_f (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_0) = \mathbf{0}. \quad (11)$$

力矩的计算还要依赖于构件之间的力的作用,则(11)式可具体表示为

$$\mathbf{Q}_m \begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{Q}_f (\mathbf{F}) \begin{pmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_d \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (12)$$

注:树枝的方向为基本割集的方向,其中 \mathbf{Q}_m 和 \mathbf{Q}_f 分别表示力矩和力的基本切割矩阵.则针对上例代

入(12)式可得

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_4 \\ 0 \\ M_1 \\ M_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{24} \\ F_{12} \\ F_{32} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (13)$$

求解可得 $F_{12} = \frac{1\,000}{27} \text{ N}$, $F_{32} = \frac{200}{9} \text{ N}$, $F_{24} = \frac{2\,000}{63} \text{ N}$, $M_4 = 2\,000 \text{ N} \cdot \text{m}$.

4 结论

基于拓扑图电路理论在行星轮系运动学特性^[6]中的应用,从理论上证明了基于拓扑图的行星轮系和电路理论之间的对应关系.应用基尔霍夫电压和电流定律来求解行星轮系的传动比和角速度以及行星轮系中各个构件之间的受力和力矩,提出了行星轮系运动学和动力学分析的新方法.

参考文献:

- [1] 饶振纲.行星齿轮传动设计[M].北京:化学工业出版社,2003:1-10.
- [2] 薛隆泉,汪友明,王慧武,等.周转轮系分类及综合[J].中国机械工程,2005,16(19):1716-1722.
- [3] 孙桓,陈作模.机械原理[M].第6版.北京:高等教育出版社,2002:361-379.
- [4] 邱关源.电路[M].第9版.北京:高等教育出版社,1999:2-70.
- [5] 薛隆泉,郝向儒,崔亚辉,等.行星式无级变速传动[M].西安:陕西科学技术出版社,1996:14-28.
- [6] 刘相蕊,薛隆泉,史晓影,等.应用电网络分析行星轮系运动学特性并仿真验证[J].机械传动,2009,33(4):97-108.

Analysis on Kinematics Characteristics of Planetary Gear Train Based on Topography Theory

WU Min, ZHAO Rong-hui

(Yueyang Vocational Technical College, Yueyang 414000, Hunan China)

Abstract: The kirchhoff's law is applied to set up the mathematical model of the planetary gear train based on topography theory. The loop equation set and cutting equation set are used to analyze and solve the problems related with planetary gear train kinematics.

Key words: topography; the kirchhoff's law; planetary gear train; kinematics characteristics

(责任编辑 陈炳权)