文章编号: 1007-2985(2010)03-0001-03

关于$(\xi, 1)$-临界图与上可嵌入性*

苏振华[1], 黄元秋[2]
(1.怀化学院音乐系,湖南 怀化 418008; 2.湖南师范大学数学系,湖南 长沙 410081)

摘 要: 设G为连通图,且$\xi(G) = k \geqslant 1$,若对G中任意边e,有$\xi(G\backslash e) = k-1$,则称G为(ξ, k)-临界图.利用ξ-1-临界图的上可嵌入性,通过研究ξ-1-临界图的加重边、点扩张、圈扩张的ξ-1-临界性,得到了新的上可嵌入图,从而丰富了上可嵌入图的种类和求法.

关键词: Betti亏数; 最大亏格; 上可嵌入; $(\xi, 1)$-临界图
中图分类号: O157.5 文献标志码: A

1 相关记号与引理

文中考虑的图,若无指明均指有限无向连通的图,但可有重边或环.用$V(G)$和$E(G)$分别表示图的点集和边集,设$A \subseteq E(G)$, $G\backslash A$表示从G中去掉A中的所有边后得到的图,若A仅有一个元素e,用$G\backslash e$表示$G\backslash A$.同时,若K是$G\backslash A$的一个连通分支,根据K的边数的奇偶性,称K为$G\backslash A$的奇边分支或偶边分支.设T为图G的一棵生成树,用$\xi(G, T)$表示$G\backslash E(T)$的所有奇边分支数,称$\xi(G) = \min\limits_{T}\xi(G, T)$为$G$的Betti亏数,这里min取遍$G$的所有生成树$T$.

曲面指一个连通紧致2-维闭流形.图G在曲面S上的2-胞腔嵌入是指存在1-1连续映射$h: G \to S$,使得$S\backslash h(G)$的每个连通分支与开圆盘拓扑同胚.考虑的嵌入均指胞腔嵌入,此时,$S\backslash h(G)$每个连通分支称为G在S上的面.图G的最大亏格记为$\gamma_M(G)$[1],是指最大的整数k,使得G在亏格为k的定向曲面S上有2-胞腔嵌入.由Euler公式,易得$\gamma_M(G) \leqslant [\frac{\beta(G)}{2}]$,这里$\beta(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1$称为图$G$的圈秩数(或Betti数);同时,若$G$的最大亏格取到上述等号,则称$G$是上可嵌入的.关于图的最大亏格及上可嵌入性,有以下结论成立.

引理1[2-3] 设G为图,则:

(i) $\gamma_M(G) = \frac{\beta(G) - \xi(G)}{2}$;

(ii) G是上可嵌入的当且仅当$\xi(G) \leqslant 1$.

因为$\beta(G)$是一个极易确定的量,由引理1(i),知道了一个图的Betti亏数,等价于知道了这个图的最大亏格,反之亦然.因此,确定图的Betti亏数是确定最大亏格的关键.文献[3]首次引入(ξ, k)-临界图的定义:设G为图且$\xi(G) = k \geqslant 1$,若G为2-边连通的,且对G的任意边e,有$\xi(G\backslash e) = k-1$,则称G为(ξ, k)-临界图.并且得到如下结论成立.

引理2[4] 设G为一个图,则:

* 收稿日期: 2010-03-03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771062); 教育部"新世纪优秀人才支持计划"项目(NCET-07-0276)
作者简介: 苏振华(1982-),男,湖南桃源人,怀化学院音乐系助教,硕士,主要从事图论及其应用研究; 黄元秋(1965-),男,湖南安乡人,湖南师范大学数学系教授,博士,主要从事图论及其应用研究.

(ⅰ) 若 G 为 $\xi-1-$ 临界图, 则 G 是上可嵌入的;

(ⅱ) 若 G 为 2- 边连通图, 且对 G 中的任意边 e, 有 $\xi(G\backslash e)=0$, 则 G 为 $\xi-1-$ 临界图;

(ⅲ) 若 G 为 4- 边连通图且 $\beta(G)$ 为奇数, 则 G 为 $\xi-1-$ 临界图;

(ⅳ) 若 G 拓扑同胚于 H, H 为 $\xi-1-$ 临界图, 则 G 为 $\xi-1-$ 临界图;

(ⅴ) 设 G 是在图 H 中加入偶数个关联某点的环后所得到的图, 若 H 为 $\xi-1-$ 临界图, 则 G 为 $\xi-1-$ 临界图;

(ⅵ) 设 G 是在图 H 通过一个关于 $T-$ 型扩张运算后所得到的图, 若 H 为 $\xi-1-$ 临界图, 则 G 为 $\xi-1-$ 临界图.

笔者在文献[3] 的基础上对图的 $\xi-1-$ 临界性作了进一步研究, 主要对点扩张、圈扩张等的 $\xi-1-$ 临界性进行了探讨, 得到了新的上可嵌入图.

2 主要结果及其证明

定理 1 设 H 为 $\xi-1-$ 临界图, G 是在 H 中的任意 2 点 $\{v_1, v_2\}$ 加上两重边 e_1, e_2 后所得到的图, 则 G 是 $\xi-1-$ 临界的.

证明 因为 H 是 2- 边连通的, 且 $\beta(H)$ 为奇数, 不难验证 G 也是 2- 边连通的, 且 $\beta(G)$ 为奇数. 由引理 2(ⅰ), 只需证对 G 中的任意边 e, $\xi(G\backslash e)=0$. 若 $e\notin\{e_1, e_2\}$: 因为 H 为 $\xi-1-$ 临界图, 所以存在 $H\backslash e$ 的生成树 T_e, 使得 $\xi(H\backslash e, T_e)=0$, 取 $G\backslash e$ 的生成树 $T=T_e$, 不难看出 $(G\backslash e)\backslash E(T)$ 中无奇边分支, 即 $\xi(G\backslash e, T)=0$, 因此 $\xi(G\backslash e)=0$. 若 $e\in\{e_1, e_2\}$: 根据对称性, 不妨设 $e=e_1$, 记 H 与 v_1 关联的任意一边为 h, 则有 $H\backslash h$ 的生成树 T_h, 使得 $\xi(H\backslash h, T_h)=0$, 即 $(H\backslash h)\backslash E(T_h)$ 中无奇边分支, 现取 $G\backslash e$ 的生成树 $T=T_h$, 易知 $(G\backslash e)\backslash E(T)$ 中无奇边分支, 即 $\xi(G\backslash e)=0$. 定理 1 证毕.

设 H 为一个图, H 的一次点扩张是指, 剖分 H 的任意 $2k+1(k\geqslant1)$ 条边 $e_1, e_2, \cdots, e_{2k+1}$(不必相异), 即在 $e_1, e_2, \cdots, e_{2k+1}$ 上插入新顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k+1}$, 然后加 1 个与它们不同的新顶点 u, 并连边 $uv_i(1\leqslant i\leqslant 2k+1)$. 特别, 当 $k=1$ 时, 就是文献[3] 中的 $T-$ 型扩张.

定理 2 设 H 为 $\xi-1-$ 临界图, 若 G 是由 H 通过点扩张而得到的图, 则 G 是 $\xi-1-$ 临界图.

证明 不妨设 G 是由 H 经过这样一次点扩张而得到的图: 在 H 的任意 $2k+1(k\geqslant1)$ 条边 $e_1, e_2, \cdots, e_{2k+1}$ 上插入 $2k+1$ 个新顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k+1}$ 所得到的图为 H', 然后在 H' 中加 1 个新顶点 u, 并连边 $uv_i(1\leqslant i\leqslant 2k+1)$, 就得到图 G. 显然, H' 即为 H 剖分所得到的图. 由引理 2(ⅲ), H' 是 $\xi-1-$ 临界图. 不难验证, G 是 2- 边连通的, 且 $\beta(H)$ 为奇数. 因此, 由引理 2(ⅰ), 只需证对 G 中的任意边 e, $\xi(G\backslash e)=0$.

情况 1 若 $e\notin\{uv_1, uv_2, \cdots, uv_{2k+1}\}$. 因为 H' 是 $\xi-1-$ 临界的, 所以 $\xi(H'\backslash e)=0$. 设 T_e 是 $H'\backslash e$ 的最优生成树, 则取 $T=T_e\cup\{uv_1\}$, 显然 T 是 $G\backslash e$ 的一棵生成树. 在 $(G\backslash e)\backslash E(T)$ 中只有 $2k$ 条边 $uv_i(i=2, 3, \cdots, 2k+1)$ 和公共顶点 u 不在 $(H'\backslash e)\backslash E(T_e)$ 中, 所以 $\xi(G\backslash e, T)\leqslant\xi(H'\backslash e, T_e)=\xi(H'\backslash e)=0$. 从而 $\xi(G\backslash e)=0$.

情况 2 若 $e\in\{uv_1, uv_2, \cdots, uv_{2k+1}\}$. 根据对称性, 不妨设 $e=uv_1$, 记 H' 中与 v_2 关联的任意一边为 h. 因为 H' 是 $\xi-1-$ 临界图, 所以存在 $H'\backslash h$ 的生成树 T_h, 使得 $\xi(H'\backslash h, T_h)=0$, 即 $(H'\backslash h)\backslash E(T_h)$ 中无奇边分支. 现取 $G\backslash e$ 的生成树 $T=T_h\cup\{uv_3\}$, 显然在 $(G\backslash e)\backslash E(T)$ 中只有 $2k-1$ 条边 $uv_i(i=2, 4, 5, \cdots, 2k+1)$ 和公共顶点 u 不在 $(H'\backslash h)\backslash E(T_h)$ 中, 而这 $2k-1$ 条边与 $H'\backslash E(T_h)$ 的唯一的奇分支是连通的(通过 uv_2 相连). 因此, $(G\backslash e)\backslash E(T)$ 无奇边分支, 即 $\xi(G\backslash e)=0$.

定理 2 证毕.

设 H 为一个图, H 的一次(偶) 圈扩张是指, 剖分 H 的任意 $2k(k\geqslant2)$ 条边 $e_1, e_2, \cdots, e_{2k}$(不必相异), 即在 $e_1, e_2, \cdots, e_{2k}$ 上插入新顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$, 然后加 1 个与它们不同的新的偶圈 $u_1u_2\cdots u_{2k}u_1$, 并连边 $u_iv_i(1\leqslant i\leqslant 2k)$.

定理 3 设 H 为 $\xi-1-$ 临界图, 若 G 是由 H 通过偶圈扩张而得到的图, 则 G 是 $\xi-1-$ 临界图.

证明 设在 H 的任意 $2k(k\geqslant2)$ 条边 $e_1, e_2, \cdots, e_{2k}$ 上分别插入 $2k$ 个新顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$ 得到图 H', 然后加 1 个偶圈 $u_1u_2\cdots u_{2k}u_1$, 连边 $u_iv_i(1\leqslant i\leqslant 2k)$ 得到图 G. 显然 H' 与 H 同胚, 由引理 2(ⅲ), H' 是 ξ

-1-临界图, 易知 G 是2-边连通的, 且 $\beta(G)$ 为奇数. 下面来证明对 G 中的任意边 e, $\xi(G\setminus e)=0$.

情况1 若 $e\notin\{u_iv_i, u_iv_{i+1}(1\leqslant i\leqslant 2k)\}$. 因为 H' 是ξ-1-临界的, 所以存在 $H'\setminus e$ 的生成树 T_e, 使得 $\xi(H'\setminus e, T_e)=0$. 取 $T=T_e\cup\{u_iv_i(1\leqslant i\leqslant 2k)\}$, 显然 T 是 $G\setminus e$ 的一棵生成树, 且在 $(G\setminus e)\setminus E(T)$ 中只有1个偶圈 $u_1u_2\cdots u_{2k}u_1$ 不在 $(H'\setminus e)\setminus E(T_e)$ 中, 所以 $\xi(G\setminus e, T)\leqslant\xi(H'\setminus e, T_e)=\xi(H'\setminus e)=0$. 从而 $\xi(G\setminus e)=0$.

情况2 若 $e\in\{u_iv_i(1\leqslant i\leqslant 2k)\}$. 根据对称性, 不妨设 $e=u_1v_1$, 记 H' 中与 v_2 关联的任意一边为 h. 同样, 有 $H'\setminus h$ 的生成树 T_h, 使得 $\xi(H'\setminus h, T_h)=0$. 现取 $G\setminus e$ 的生成树 $T=T_h\cup\{u_3v_3, u_4v_4, \cdots, u_{2k}v_{2k}, u_1u_2, u_1u_{2k}\}$, 则 $(G\setminus e)\setminus E(T)$ 中只有 $2k-1$ 条边 $\{u_2v_2, u_2v_3, u_3v_4, \cdots, u_{2k-1}u_{2k}\}$ 不在 $(H'\setminus h)\setminus E(T_h)$ 中, 而这 $2k-1$ 条边与 $H'\setminus E(T_h)$ 的唯一的奇分支是连通的(通过 u_2v_2 相连). 因此, $(G\setminus e)\setminus E(T)$ 无奇边分支, 即 $\xi(G\setminus e)=0$.

情况3 若 $e\in\{u_iu_{i+1}(1\leqslant i\leqslant 2k)\}$. 根据对称性, 不妨设 $e=u_1u_2$, 记 H' 中与 v_{2k} 关联的任意一边为 h. 同样, 有 $H'\setminus h$ 的生成树 T_h, 使得 $\xi(H'\setminus h, T_h)=0$. 现取 $G\setminus e$ 的生成树 $T=T_h\cup\{u_1u_{2k}, u_1v_1, u_2v_2, \cdots, u_{2k-1}v_{2k-1}\}$, 则 $(G\setminus e)\setminus E(T)$ 中有 $2k-1$ 条边 $\{u_2u_3, u_3v_4, \cdots, u_{2k-1}u_{2k}, u_{2k}v_{2k}\}$ 不在 $(H'\setminus h)\setminus E(T_h)$ 中, 而这 $2k-1$ 条边与 $H'\setminus E(T_h)$ 的唯一的奇分支是连通的(通过 $u_{2k}v_{2k}$ 相连). 因此, $(G\setminus e)\setminus E(T)$ 无奇边分支, 即 $\xi(G\setminus e)=0$.

定理3证毕.

因为 n-圈 C_n 和完全图 K_4 都是ξ-1-临界图, 所以根据定理2和定理3得到下面2类非4-边连通的ξ-1-临界图:

推论1 由 n-圈 C_n 经过若干次点扩张和偶圈扩张得到的图是2-边连通的ξ-1-临界图, 且是上可嵌入的.

特别, 轮 $W_{2k+1}(k\geqslant 1)$ 和广义 Petersen 图 $P(2k, 1)(k\geqslant 2)$ 都是ξ-1-临界图, 且是上可嵌入的.

推论2 由完全图 K_4 经过若干次点扩张和偶圈扩张得到的图是3-边连通的ξ-1-临界图, 且是上可嵌入的.

参考文献:

[1] 刘彦佩. 图的可嵌入性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1994.

[2] CHEN J, ARCHDEACON D, GROSS J L. Maximum Genus and Connectivity [J]. Discrete Math., 1996, 49(1): 19-29.

[3] CHEN J, KANCHIS P, GROSS J L. A Tight Bound on the Maximum Genus of a Simplical Graph [J]. Discrete Math., 1996, 156(2): 83-102.

[4] 黄元秋, 刘彦佩. 关于(ξ, k)-临界图[J]. 应用数学, 2001, 14(1): 84-89.

On (ξ, 1)-Critical Graphs and Upper Embeddability

SU Zhen-hua[1], HUANG Yuan-qiu[2]

(1. Department of Music, Huaihua University, Huaihua 418008, Hunan China; 2. Department of Mathematics, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract: Let G be a connected graph with $\xi(G)=k\geqslant 1$. If $\xi(G\setminus e)=k-1$, G is called to be a $(\xi, 1)$-critical graph. This paper gives the upper embeddability of the ξ-1-critical graphs, and shows that extension of a vertex and extension of a cycle dose not change the ξ-1-cirtical graphs. The new upper embeddable graphs are obtained, enriching the kind and seeking methods.

Key words: Betti deficiency number; maximum genus; upper embeddability; (ξ, 1)-critical graphs

(责任编辑 向阳洁)