

文章编号: 1007- 2985(2010) 04- 0067- 04

三粒子 GHZ 态隐形传输令牌环网的保真度分析

周小清, 邬云文

(吉首大学物理科学与信息工程学院, 湖南 吉首 416000)

摘 要: 通过对三粒子纠缠 GHZ 态隐形传输令牌环网通过程的分析, 得到了影响保真度的 2 个关键点, 并分别对其保真度进行了计算. 计算结果表明: 当 $|a| = 0, |b| = 1$ 或 $|a| = 1, |b| = 0$ 时, 保真度达最大值 1; 当 $|a| = |b| = \sqrt{2}/2$ 时, Bell 基测量时的保真度为 0.5, 平均保真度为 0.67. Von Neuman 测量时的保真度与分析角 θ 有关, 若 $\theta = \pi/4 \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), 保真度取最大值 1; 若 $\theta = \pi/4 \pm k\pi/2$ ($k = 0, 1, 3, 5 \dots$) 时, 保真度取最小值 0, 平均保真度为 0.5.

关键词: 量子通信; 隐形传态; GHZ 态; 保真度

中图分类号: O413.2; TN915.0

文献标志码: A

由于量子隐形传态在通信领域的独特作用, 一经提出便引起了人们的广泛关注^[1], 吸引了众多科学家的极大兴趣并投入研究. Bouwmeester 等人于 1997 年利用纠缠光子对作为量子信道实现了人类历史上的第 1 次隐形传态^[2]. 邬云文等人对囚禁在 Paul 阱内的二囚禁离子的纠缠态进行了研究并计算出了前 100 个位态, 并从理论上实现了量子逻辑门^[3-6]. 周小清等人研究了受控纠缠粒子的隐形传态, 并对量子隐形传态局域网进行了研究并设计出了三粒子纠缠 W 态令牌总线网络和三粒子纠缠 GHZ 态令牌环网^[7-8], 在此基础上还进一步研究了多粒子纠缠量子隐形传态的实现以及远程量子态的制备^[9-10]. 然而在上述文献中对于量子通信网络的保真度还没有考虑, 而保真度表征输入态与输出态的接近程度, 是量子通信中的一个重要物理量. 笔者将在文献[8]的基础上研究了三粒子纠缠 GHZ 态令牌环网的保真度.

1 三粒子纠缠 GHZ 态隐形传态方法

利用三粒子 GHZ 态进行隐形传态的方法为^[8]: 假设在甲地的 Alice 手中有一粒子 1, 其量子态为

$$|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (1)$$

其中 $a^2 + b^2 = 1$. 现需要将该粒子的量子态传送给在乙地的 Bob 或丙地的 Cliff, 为此, 必须在 Alice、Bob 和 Cliff 间建立量子信道, 方法如下.

(1) 制备三粒子 GHZ 态. 可利用三粒子 GHZ 态纠缠源产生三纠缠粒子 2、3 和 4, 设它们的纠缠态为

$$|\phi\rangle_{234} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle_{234} + |111\rangle_{234}). \quad (2)$$

(2) 将 $|\phi\rangle_{234}$ 中的粒子 2 传给 Alice, 粒子 3 传给 Cliff, 粒子 4 传给 Bob.

(3) Alice 将手中的粒子 1、2 进行联合 Bell 基测量, 然后将测量结果发送到公用的经典信道上.

(4) Cliff 在公用的经典信道上收到 Alice 的测量结果后再进行 Von Neumann 测量, 并将测量结果也发送到公用的经典信道上.

*收稿日期: 2010- 06- 10

基金项目: 湖南省科技计划资助项目(2008FJ3078)

作者简介: 周小清(1963-), 男, 湖南澧县人, 吉首大学物理科学与信息工程学院教授, 主要从事量子信息研究.

(5) Bob 根据 Alice 和 Cliff 的测量结果选择适当的么正变换矩阵对粒子 4 进行么正变换从而获得粒子 1 在传送前的量子态。

由上述隐形传态过程可以看出, 影响量子通信保真度的关键位置为: Bell 基测量和 Von Neumann 测量。

2 隐形传态的保真度

2.1 Bell 基测量的保真度

由文献[8]可知: 当 Alice 的测量结果为 $|\beta\rangle_{30}$ 时, 粒子 3、4 的量子态变为

$$|\phi_{00}\rangle_{34} = a|00\rangle_{34} + b|11\rangle_{34}. \quad (3)$$

由(3)式可知, 其密度矩阵为

$$\rho_3 = \text{tr}_4\{|\phi_{00}\rangle_{34}\langle\phi_{00}|_3\} = \text{tr}_4[(a|00\rangle_{34} + b|11\rangle_{34}) \cdot (a\langle 00|_{34} + b\langle 11|_{34})] = |a|^2|0\rangle_3\langle 0| + |b|^2|1\rangle_3\langle 1|. \quad (4)$$

其保真度为

$$F_3 = \langle\phi_1|\rho_3|\phi_1\rangle = |a|^4 + |b|^4. \quad (5)$$

因为 $|a|^2 + |b|^2 = 1$, 所以(5)式可化简为

$$F_3 = 2|a|^4 - 2|a|^2 + 1. \quad (6)$$

对(6)式求极值可得: 当 $|a| = |b| = \sqrt{2}/2$ 时, 保真度 F_3 有最小值且最小值为 0.5; 当 $|a| = 0$ 、 $|b| = 1$ 或 $|a| = 1$ 、 $|b| = 0$ 时, 保真度 F_3 有最大值且最大值为 1。

为求平均保真度, 令

$$a = \cos \frac{\phi}{2}, b = e^{i\varphi} \sin \frac{\phi}{2}, \quad (7)$$

则平均保真度为

$$\bar{F}_3 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi F_3 \sin \phi \cdot d\phi = 2/3 = 0.67. \quad (8)$$

同理可得

$$\rho_4 = \text{tr}_3\{|\phi_{00}\rangle_{34}\langle\phi_{00}|_4\} = |a|^2|0\rangle_4\langle 0| + |b|^2|1\rangle_4\langle 1|, \quad (9)$$

$$F_4 = \langle\phi_1|\rho_4|\phi_1\rangle = |a|^4 + |b|^4, \quad (10)$$

其平均保真度为

$$\bar{F}_4 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi F_4 \sin \phi \cdot d\phi = 2/3 = 0.67. \quad (11)$$

由(6)、(8)、(11)式可知, 对粒子 1、2 作联合 Bell 基测量后, 粒子 1、2 的量子态将会坍缩到其中 1 个 Bell 基上, 原粒子 1 中的量子信息已传到粒子 3、4 的纠缠态中, 量子信息传送的最小保真度为 0.5, 最大保真度为 1, 平均保真度为 0.67。

2.2 Von Neumann 测量的保真度

由文献[8]可知, 当 Cliff 作 Von Neumann 测量时, 在新基底 $|x\rangle, |y\rangle$ 下, 粒子 3 的量子态可以分解为

$$\begin{cases} |0\rangle_3 = \sin \theta |x\rangle_3 + \cos \theta |y\rangle_3, \\ |1\rangle_3 = \cos \theta |x\rangle_3 - \sin \theta |y\rangle_3. \end{cases} \quad (12)$$

其中 θ 为分析角。将(12)式代入(3)式, 可得

$$|\phi_{00}\rangle_{34} = (a \sin \theta |0\rangle_3 + b \cos \theta |1\rangle_3) |x\rangle_4 + (a \cos \theta |0\rangle_3 - b \sin \theta |1\rangle_3) |y\rangle_4. \quad (13)$$

显然, Cliff 的测量结果有 2 种可能, 测得 $|x\rangle_3$ 和 $|y\rangle_3$ 的几率均为 1/2。测量后, Cliff 需将测量结果通过一经典线路传给 Bob, Bob 根据 Cliff 的测量结果进行恰当的么正变换即可得到粒子 1 的量子态。现假设 Cliff 的测量结果为 $|x\rangle_3$, 则粒子 4 的状态为

$$|\phi_{00x}\rangle_4 = a \sin \theta |0\rangle_4 + b \cos \theta |1\rangle_4, \quad (14)$$

归一化后可得

$$| \phi_{00x} \rangle = \frac{a \sin \theta | 0 \rangle + b \cos \theta | 1 \rangle}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}, \quad (15)$$

又由文献[8]可知

$$| \phi_{00} \rangle = U_{00x}^{-1} | \phi_{00x} \rangle = a | 0 \rangle + b | 1 \rangle, \quad (16)$$

其保真度为

$$F_4^1(| \phi_{00} \rangle, | \phi_{00x} \rangle) = \langle \phi_{00} | \phi_{00x} \rangle = \langle a | 0 \rangle + \langle b | 1 \rangle = a + b$$

$$| \langle \phi_{00} | \phi_{00x} \rangle |^2 = \frac{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^2}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}, \quad (17)$$

当 $| a | = 0, | b | = 1$ 或 $| a | = 1, | b | = 0$ 时, 由(17)式可知保真度恒为 1, 与分析角 θ 无关. 当 $| a | = | b | = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, (17) 式可化简为

$$F_4^1(| \phi_{00} \rangle, | \phi_{00x} \rangle) = \frac{1}{2} (\sin \theta + \cos \theta)^2. \quad (18)$$

由(18)式可知: 当 $\theta = \pi/4 \pm k\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时, 保真度取最大值 1; $\theta = \pi/4 \pm k\pi/2 (k = 0, 1, 3, 5 \dots)$ 时, 保真度取最小值 0. 其图形见图 1.

由(18)式可得保真度对 θ 在 $[0, 2\pi]$ 取平均为

$$F_4^1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{2} d\theta = 0.5. \quad (19)$$

2.3 总保真度

由量子通信过程分析可知, 整个量子通信的保真度应为上述 2 个阶段保真度之积. 当 $| a | = 0, | b | = 1$ 或 $| a | = 1, | b | = 0$ 时, 保真度为最大值 1; 当 $| a | = | b | = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 若 $\theta = \pi/4 \pm k\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$ 保真度为 0.5, 即情形 1, 若 $\theta = \pi/4 \pm k\pi/2 (k = 0, 1, 3, 5 \dots)$, 保真度为 0, 即情形 2(见表 1).

表 1 通信各阶段保真度

项目	Bell 基测量值	Von Neumann 测量值	总保真度
$ a = 0, b = 1$	1	1	1
$ a = 1, b = 0$	1	1	1
情形 1	0.5	1	0.5
情形 2	0.5	0	0

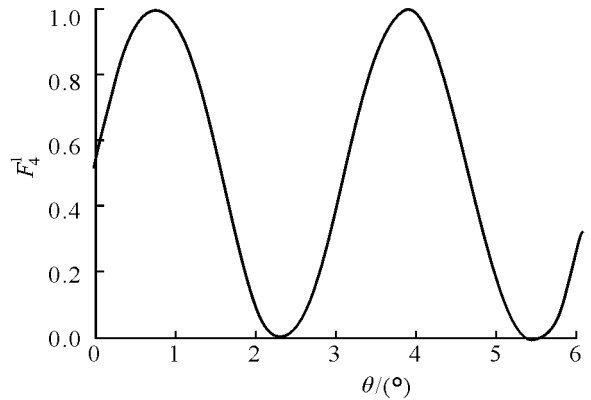


图 1 $| a | = | b | = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 保真度随分析角 θ 的变化关系

3 结论

在三粒子纠缠 GHZ 态隐形传输量子信息的过程中, 影响保真度的关节点在 Bell 基测量和 Von Neumann 测量. 在 Bell 基测量过程中, 量子信息传送的保真度仅与量子态的初始系数有关, 当 $| a | = 0, | b | = 1$ 或 $| a | = 1, | b | = 0$ 时, 保真度有最大值 1; 当 $| a | = | b | = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 保真度有最小值 0.5; 平均保真度为 0.67. 在 Von Neumann 测量中, 当 $| a | = 0, | b | = 1$ 或 $| a | = 1, | b | = 0$ 时, 保真度恒为 1, 与分析角 θ 无关; 当 $| a | = | b | = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 若 $\theta = \pi/4 \pm k\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$, 保真度取最大值 1; 若 $\theta = \pi/4 \pm k\pi/2 (k = 0, 1, 3, 5 \dots)$ 时, 保真度取最小值 0; 平均保真度为 0.5.

参考文献:

[1] BENNETT C H, BRASSARD G, CREPEAU C, et al. Teleporting an Unknown Quantum State Via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels [J]. Phys. Rev. Lett., 1993, 70(13): 1 895- 1 899.

[2] BOUWM EESTER D, Pan J W, et al. Experimental Quantum Teleportation [J]. Nature, 1997, 390(6 660): 575- 579.

[3] 邹云文, 海文华. 共面两囚禁离子体系精确的量子运动 [J]. 物理学报, 2006, 55(11): 5 721- 5 727.

[4] 邹云文, 海文化. Pauli 阱中共面两离子系统的能量本征态 [J]. 物理学报, 2006, 55(7): 3 315- 3 321.

- [5] 邬云文, 海文化. Pauli 阱中一维两离子系统的能带结构 [J]. 物理学报, 2006, 55(2): 583- 589.
- [6] 邬云文, 周小清, 叶伏秋, 等. 离子阱中共线两离子基本量子逻辑门的实现 [J]. 量子光学学报, 2008, 14(3): 289- 292.
- [7] 周小清, 邬云文. 利用三光子纠缠态建立量子隐形传态网络的探讨 [J]. 物理学报, 2007, 56(4): 1 881- 1 887.
- [8] 周小清, 邬云文. 利用三粒子 GHZ 态实现令牌环量子隐形传态网络 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2009, 30(1): 56- 62.
- [9] 赵 晗, 周小清, 杨小琳. 基于腔 QED 的多用户间的多原子量子信道的建立 [J]. 物理学报, 2009, 58(9): 5 970- 5 977.
- [10] ZHAO Han, ZHOU Xiao-Qing, YANG Xiao-lin. Generation of Remote Multi-Photon Entangled State from Einstein-Podolsky-Rosen Photon Pairs [J]. Optics Communications, 2010, 283: 2 472- 2 475.

Token-Ring Network Fidelity of Teleportation by Three-Particles Entangled GHZ State

ZHOU Xiao-qing, WU Yun-wen

(College of Physics Science and Information Engineering, Jishou University, Jishou 416000, Hunan China)

Abstract: Through analyzing quantum communication in the token-ring network of three-particles entangled GHZ state, two articulation points are found and the fidelity is calculated. The calculation results show that the maximum fidelity is 1 for $|a| = 0, |b| = 1$ or $|a| = 1, |b| = 0$. For $|a| = |b| = \sqrt{2}/2$, the fidelity is 0.5. The average fidelity is 0.67 at Bell-state measurement. With Von Neuman measurement, the fidelity relates to analyzer angle θ . If $\theta = \pi/4 \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), the maximum fidelity is 1; if $\theta = \pi/4 \pm k\pi/2$ ($k = 0, 1, 3, 5 \dots$), the minimum of the fidelity is zero. The average fidelity is 0.5.

Key words: quantum communication; teleportation; GHZ state; fidelity

(责任编辑 陈炳权)

(上接第 58 页)

Phase-Resolved Spectra of Radio Mean Pulse Profiles for PSR 0329+ 54, 0834+ 06, 1133+ 16

YANG Jiang-he

(College of Physics and Electronics, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, Hunan China)

Abstract: Three pulsars (PSR 0329+ 54, 0834+ 06, 1133+ 16) with high quality signal-to-noise of radio mean pulse profiles are selected from the available literature. The characteristics of the radio mean pulse profiles are analyzed for three pulsars. The phase-resolved spectrum and the correlations between radio emissions flux and frequency at the same phase are obtained. The results are as follows: The characteristics of the phase-resolved spectra are different among three pulsars. For 1133+ 16, the spectra is steep at two sides of pulse profiles, otherwise flatter in the middle. For 0329+ 54 and 0834+ 06, the spectra are flat at the leading part and steeper at the trailing. According to those spectra characteristics, pulsars can be classified. For 1133+ 16, there are good correlations between radio emission and frequency at same phase, and when $|\Phi| > 3^\circ$, the correlation coefficient $R > 0.8$ and chance probability $P < 0.03$, which show that the radio emission of 1133+ 16 is power law spectrum. So, for 0329+ 54, when $\Phi > 3^\circ$ and $\Phi < -3^\circ$, $R > 0.5$, $P < 20\%$, and for 0834+ 06, those relationships are mutative and weakly at different phase, and means the radio emission may be not power law.

Key words: radio pulsars; mean pulse profiles; phase-resolved spectrum

(责任编辑 陈炳权)