第 31 卷 第 4 期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 31 No. 4
2010 年 7 月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) July. 2010

文章编号: 1007-2985(2010)04-0015-03

关于酉不变范数的矩阵不等式

张丽娟, 任芳国
(陕西师范大学数学与信息科学学院, 陕西 西安 710062)

摘 要: 将复数域上的一些常见不等式推广到方阵 M_n 上, 并利用奇异值分解理论和酉不变范数的性质得到了一些关于矩阵不等式的结论.

关键词: 酉不变范数; 矩阵不等式; 奇异值分解
中图分类号: O177.1 文献标志码: A

矩阵的范数是矩阵的一个重要数值特征, 在矩阵计算、优化领域、最佳逼近问题以及扰动理论中有重要的应用[1-4]. 笔者将复数域上的常见不等式 $|z-\mathrm{Re}\,z|\leqslant|z-x|$, $|\mathrm{Re}\,z|\leqslant|z|$ $(\forall x\in\mathbf{R}, z\in\mathbf{C})$ 推广到方阵上 M_n, 并利用奇异值分解理论与酉不变范数的性质证明了一些矩阵不等式.

1 相关定义与引理

定义 1 设 $\||\cdot|\|$ 为一个矩阵范数, 且满足 $\||\cdot|\|^{\mathrm{H}}\equiv\||\cdot|\|$, 则称矩阵范数 $\||\cdot|\|$ 为一个自伴范数.

定义 2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{M}_n$ 上的任意一个矩阵, $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{M}_n$ 为任意的酉矩阵, 若满足 $\|\boldsymbol{UAV}\|=\|\boldsymbol{A}\|$, 则称 $\|\cdot\|$ 为酉不变范数.

引理 1[5] (奇异值分解定理) 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_{m,n}$, 且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=k$, $q=\min\{m,n\}$, 则存在 m 阶酉矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\Sigma & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}$, $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k)$, σ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值且 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_k>0$. $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Q})$ 的列向量是 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})$ 的对应于特征值 $\lambda_1(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})\leqslant\lambda_2(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})$ 的标准正交特征向量.

引理 2[5] (**Courant-Fischer**) 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n$ 是具有特征值 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 的 Hermite 矩阵, k 是给定的整数, $1\leqslant k\leqslant n$, 那么 $\min\limits_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-k}\in\mathbf{C}^n}\max\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n,\\ \boldsymbol{x}\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-k}}}\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AX}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}}=\lambda_k$, $\max\limits_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}\in\mathbf{C}^n}\min\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n,\\ \boldsymbol{x}\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}}}\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AX}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}}=\lambda_k$.

引理 3[5] 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_{m,n}$, $q=\min\{m,n\}$, 设 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_q\geqslant0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的有序奇异值, 又设 k 是适合 $1\leqslant k\leqslant q$ 的某个整数, 则 $\min\limits_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}\in\mathbf{C}^n}\max\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n,\\ \boldsymbol{x}\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}}}\dfrac{\|\boldsymbol{Ax}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}=\sigma_k$, $\max\limits_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-k}\in\mathbf{C}^n}\min\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n,\\ \boldsymbol{x}\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-k}}}\dfrac{\|\boldsymbol{Ax}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}=\sigma_k$.

* 收稿日期: 2010-04-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10971123); 陕西师范大学重点基金资助项目(995281)
作者简介: 张丽娟(1985-), 女, 河南修武人, 陕西师范大学硕士研究生, 主要从事矩阵论研究.
通讯作者: 任芳国(1969-), 男, 陕西乾县人, 陕西师范大学副教授, 博士, 主要从事算子论方面的研究. E-mail: rfangguo@snnu.edu.cn.

引理 4[5] 设 $A\in M_{m,n}$, $q=\min\{m,n\}$, 并且定义 $\widetilde{A}\in M_{m+n}$ 为 $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}0 & A\\ A^{H} & 0\end{pmatrix}\in M_{m+n}$, 设 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_q$ 是非负实数, 则 A 的奇异值是 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_q$ 当且仅当 $\widetilde{A}$ 的 $m+n$ 个特征值为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_q,-\sigma_1,-\sigma_2,\cdots,-\sigma_q$ 和 $|m-n|$ 个 0.

引理 5[5] (**Weyl**) 设 $A,B\in M_n$ 是 Hermite 矩阵, 且 A,B 和 $A+B$ 的诸特征值按递增顺序排列, 那么, 对于使得 $j,k\in[1,n]$ 且 $j+k\leqslant n+1$ 的每对整数 j,k, 有 $\lambda_{j+k-n}(A+B)\geqslant\lambda_j(A)+\lambda_k(B)$, 而对于使得 $j,k\in[1,n]$ 且 $j+k\leqslant n+1$ 的每对整数 j,k, 有 $\lambda_{j+k-1}(A+B)\geqslant\lambda_j(A)+\lambda_k(B)$.

引理 6[5] 设 $A\in M_{m,n}$ 是具有奇异值分解 $A=V_1\Sigma(A)W_1^{H}$ 和 $B=V_2\Sigma(B)W_2^{H}$ 的某 2 个矩阵, $V_1,V_2\in M_m$ 和 $W_1,W_2\in M_n$ 是酉矩阵, 而 $\Sigma(A)$ 和 $\Sigma(B)$ 的"对角元"都按递增顺序排列, 则 $\|A-B\|\geqslant\|\Sigma(A)-\Sigma(B)\|$ 对 $M_{m,n}$ 上的每个酉不变范数 $\|\cdot\|$ 成立.

引理 7[5] 设 $A,B\in M_{m,n}$ 是分别具有奇异值 $\sigma_1(A)\geqslant\sigma_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_q(A)\geqslant 0$ 和 $\sigma_1(B)\geqslant\sigma_2(B)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_q(B)\geqslant 0$ 的某 2 个矩阵, 其中 $q=\min\{m,n\}$. 要使 $\|A\|\leqslant\|B\|$ 对 $M_{m,n}$ 上的每个酉不变范数成立, 其充分条件为对所有 $i=1,2,\cdots,q$ 有 $\sigma_i(A)\leqslant\sigma_i(B)$; 其充要条件为 $\sigma_1(A)\leqslant\sigma_1(B)$, $\sigma_1(A)+\sigma_2(A)\leqslant\sigma_1(B)+\sigma_2(B)$, $\cdots$, $\sigma_1(A)+\sigma_2(A)+\cdots+\sigma_1(A)\leqslant\sigma_1(B)+\sigma_2(B)+\cdots+\sigma_q(B)$.

2 定理及证明

定理 1 设 A 是 n 阶方阵, 当 $\|\cdot\|$ 为酉不变范数, 则不等式

$$\left\|A-\frac{1}{2}(A+A^{H})\right\|\leqslant\|A-H\| \tag{1}$$

对所有的 Hermite 矩阵 H 都成立.

证明 设 $A\in M_n$, 且 H 为任意的 Hermite 矩阵, 有 $A-\frac{1}{2}(A+A^{H})=\frac{1}{2}(A-H)+\frac{1}{2}(H-A^{H})$. 当给定的 $\|\cdot\|$ 为自伴范数时, 显然有 $\left\|A-\frac{1}{2}(A+A^{H})\right\|=\left\|\frac{1}{2}(A-H)+\frac{1}{2}(H-A^{H})\right\|\leqslant\frac{1}{2}\|A-H\|+\frac{1}{2}\|(H-A)^{H}\|=\|A-H\|$; 当给定的 $\|\cdot\|$ 为酉不变范数时, 不妨设 $A-H=U\Sigma W^{H}$ 为 $A-H$ 的奇异值分解, 则 $(A-H)^{H}=W\Sigma U^{H}$, 从而 $\|(H-A)^{H}\|=\|U\Sigma W^{H}\|=\|\Sigma\|=\|W\Sigma U^{H}\|=\|A-H\|$, 因此

$$\left\|A-\frac{1}{2}(A+A^{H})\right\|=\left\|\frac{1}{2}(A-H)+\frac{1}{2}(H-A^{H})\right\|\leqslant\frac{1}{2}\|A-H\|+\frac{1}{2}\|(H-A)^{H}\|=\|A-H\|.$$

综上可得, 定理得证.

注 1 当 $(A-H)=c(H-A)^{H}$, $c\geqslant 0$ 时, 则 $\left\|A-\frac{1}{2}(A+A^{H})\right\|=\|A-H\|$.

推论 1 对所有 $A\in M_n$ 和所有酉不变范数或自伴范数 $\|\cdot\|$ 都有不等式 $\left\|\frac{A+A^{H}}{2}\right\|\leqslant\|A\|$ 成立.

定理 2 设 $A\in M_n$ 为给定的矩阵, $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant$ 为 $\frac{1}{2}(A+A^{H})$ 的有序特征值, 又设 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n\geqslant 0$ 为 A 的有序奇异值, 则 $\lambda_{n-k+1}\left[\frac{1}{2}(A+A^{H})\right]\leqslant\sigma_k(A)$, $k=1,2,\cdots,n$.

证明 由引理 2 可知 $\lambda_{n-k+1}\left[\frac{1}{2}(A+A^{H})\right]=\min\limits_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}\in C^n}\max\limits_{\substack{x\neq 0,\,x\in C^n,\\ x\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}}}\frac{x^{H}\left(\frac{A+A^{H}}{2}\right)x}{x^{H}x}$; 另一方面由引理 3 可知 $\sigma_k(A)=\min\limits_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}\in C^n}\max\limits_{\substack{x\neq 0,\,x\in C^n,\\ x\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}}}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$. 令 $y=\frac{x}{\|x\|_2}$, 则 $\|y\|_2=\langle y,y\rangle=y^{H}y=1$, 从而

$\lambda_{n-k+1}[\frac{1}{2}(A+A^{H})]=\min\limits_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}\in C^n}\max\limits_{\substack{y\in C^n,\|y\|_2=1,\\ y\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}}} y^{H}(\frac{A+A^{H}}{2})y$, $\sigma_k(A)=\min\limits_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}\in C^n}\max\limits_{\substack{y\in C^n,\|y\|_2=1,\\ y\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}}}\|Ay\|_2$. 利用推论 1, 即 $y\in C^n$ 且 $\|y\|_2=1$ 时, $\frac{y^{H}(A+A^{H})y}{2}=\mathrm{Re}\,y^{H}Ay\leqslant|y^{H}Ay|=\sqrt{(y^{H}A^{H}y)(y^{H}Ay)}=\sqrt{y^{H}A^{H}Ay}=\|Ay\|_2$, 从而 $\min\limits_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}\in C^n}\max\limits_{\substack{y\in C^n,\|y\|_2=1,\\ y\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}}} y^{H}(\frac{A+A^{H}}{2})y\leqslant\min\limits_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}\in C^n}\max\limits_{\substack{y\in C^n,\|y\|_2=1,\\ y\perp\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}}}\|Ay\|_2$, 即 $\lambda_{n-k+1}[\frac{1}{2}(A+A^{H})]\leqslant\sigma_k(A)$, $k=1,2,\cdots,n$.

定理 3　设 $A,B\in M_{m,n}$, $q=\min\{m,n\}$, 令 A 的有序奇异值是 $\sigma_1(A)\geqslant\sigma_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_q(A)\geqslant 0$, 同理 B 和 $A+B$ 也有类似的有序奇异值. $\tilde{A},\tilde{B}$ 与 $\tilde{A}+\tilde{B}\in M_{m+n}$ 为引理 4 中所定义的 Hermite 矩阵, 其中诸奇异值按递减顺序排列, 而诸特征值按递增顺序排列, 则有: (i) $\sigma_k(A)=\lambda_{m+n-k+1}(A)$, $k=1,2,\cdots,q$; (ii) $\sigma_{i+j-1}(A+B)\leq\sigma_i(A)+\sigma_j(B)$, $i,j\in[1,q]$ 且 $i+j\leq q+1$.

证明　(i) 若 A 的有序奇异值为 $\sigma_1(A)\geq\sigma_2(A)\geq\cdots\geq\sigma_q(A)\geq 0$, 则由引理 4 知 A 的 $(m+n)$ 个有序特征值为 $-\sigma_1(A)\leq-\sigma_2(A)\leq\cdots\leq-\sigma_q(A)\leq 0\leq\cdots\leq 0\leq\sigma_q(A)\leq\cdots\leq\sigma_2(A)\leq\sigma_1(A)$, 其中 0 的个数为 $|m-n|$. 显然对 $k=1,2,\cdots,q$, 有 $\sigma_k(A)=\lambda_{m+n-k+1}(A)$, 同理 $\sigma_k(B)=\lambda_{m+n-k+1}(B)$, $\sigma_k(A+B)=\lambda_{m+n-k+1}(A+B)$.

(ii) 由于 A,B 与 $A+B\in M_{m+n}$ 为 Hermite 矩阵, 且当 $i,j\in[1,q]$ 和 $i+j\leq q+1$ 时, 有 $m+n-i+1+m+n-j+1\geq m+n+(m+n-i-j+1)+1\geq m+n+1$. 从而由 (i) 的结论和引理 5 知, $\sigma_{i+j-1}(A+B)=\lambda_{m+n-(i+j-1)+1}(A+B)=\lambda_{(m+n-i+1)+(m+n-j+1)-(m+n)}(A+B)\leq\lambda_{m+n-i+1}(A)+\lambda_{m+n-j+1}(B)=\sigma_i(A)+\sigma_j(B)$. 此定理得证.

定理 4　设 $A\in M_n$ 有奇异值分解 $A=V\Sigma(A)W^{H}$, 又设 $\|\cdot\|$ 为 M_n 上的酉不变范数, 则 $\|\Sigma(A)-I\|\leq\|A-U\|\leq\|\Sigma(A)+I\|$ 对任何的酉矩阵 $U\in M_n$ 成立.

证明　设 U 为任意的酉矩阵, 显然 $\Sigma(U)=I$, 由引理 6 知 $\|\Sigma(A)-I\|\leq\|A-U\|$. 对于上界, 由定理 3 知,

$$\sigma_{i+j-1}[A+(-U)]\leq\sigma_i(A)+\sigma_j(-U)=\sigma_i(A)+\sigma_j(U),\tag{2}$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,n$, 且 $i+j\leq n+1$. 特别地取 $j=1$ 而 $i=1,2,\cdots,n$ 时, (2) 式可化为 $\sigma_i[A+(-U)]\leq\sigma_i(A)+\sigma_1(U)=\sigma_i(A)+\sigma_i(U)=\sigma_i(\Sigma(A)+I)$. 再由引理 7 知 $\|A-U\|\leq\|\Sigma(A)+I\|$, 所以对任意的酉矩阵 $U\in M_n$, 有 $\|\Sigma(A)-I\|\leq\|A-U\|\leq\|\Sigma(A)+I\|$ 成立.

定理 5　设 $A\in M_n$ 为给定的秩 k 矩阵, B 为任意的一个秩小于 k 的矩阵, 则当 $\|\cdot\|$ 为酉不变范数时, $\|A-B\|$ 有最大下界.

证明　设 $\mathrm{rank}(B)=t$, 其中 $t=0,1,\cdots,k-1$, 由于 $\mathrm{rank}(A)=k$, 可设 $A=V\Sigma(A)W^{H}$ 为 A 的奇异值分解, 其中 V,W 为 M_n 上的酉矩阵, $\Sigma(A)=\mathrm{diag}(\sigma_1(A),\sigma_2(A),\cdots,\sigma_k(A),0,\cdots,0)$, 且有 $\sigma_1(A)\geq\sigma_2(A)\geq\cdots\geq\sigma_k(A)>0$. 从而对任意的酉不变范数 $\|\cdot\|$ 有

$$\begin{aligned}\|A-B\|&\geq\|\Sigma(A)-\Sigma(B)\|=\|\mathrm{diag}(\sigma_1(A)-\sigma_1(B),\sigma_2(A)-\sigma_2(B),\cdots,\sigma_t(A)-\sigma_t(B),\sigma_{t+1}(A),\cdots,\\&\sigma_k(A),0,\cdots,0)\|\geq\|\mathrm{diag}(0,\cdots,0,\sigma_{t+1}(A),\cdots,\sigma_k(A),0,\cdots,0)\|\geq\sigma_k(A).\end{aligned}\tag{3}$$

其中, (3) 式用到了对角矩阵的酉不变范数是单调范数的事实. 另外, 当 $B=VEW^{H}$ 且 $\mathrm{rank}(B)=k-1$ 时, 可能取得等号, 其中 $E=\mathrm{diag}(\sigma_1(A),\sigma_2(A),\cdots,\sigma_{k-1}(A),0,\cdots,0)$. 因此, 任意给定的 M_n 上的秩 k 矩阵 A 和任意的一个秩小于 k 的矩阵 B, $\|A-B\|$ 有最大下界 $\sigma_k(A)$.

3　结语

证明了关于酉不变范数的矩阵不等式的几个结论, 而矩阵的范数有很多种, 且在各学科方面有诸多的应用, 希望这几个结论对读者起到抛砖引玉的作用.

(下转第 23 页)

$\frac{1}{a}$, 其 $l_1(x) = -(D + bx + Kx^2 g(x^2))(1 + x^2 f(x^2))^{-1} = 0$, x_1 与 x_2 分别为方程 $l(x) = 0$ 与定理相应条件下最大的负根与最小的正根.

注 4 文献[1 - 2] 中系统均为文献[6] 中系统的推广.

参考文献:

[1] 刘兴国, 吕 勇. 一类平面微分系统极限环的存在唯一性[J]. 湖南工业大学学报, 2008, 22(4): 17- 21.

[2] 刘兴国, 黄立宏. 一类平面多项式系统极限环的存在唯一性[J]. 高校应用数学学报, 2007, 22(4): 455- 461.

[3] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[4] 叶彦谦. 多项式微分系统定性理论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1995.

[5] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

[6] 马知恩. 一类三次系统极限环的存在唯一性[J]. 数学年刊: A 辑, 1986, 7(1): 1- 6.

Qualitative Analysis of a Class of Planar Differential Systems

LIU Qi-kuan[1], LIU Hao[1], LI Ying-hui[2]

(1. School of Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 601225, China; 2. School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: The properties of equilibrium points are analyzed by the singular point theory, and the non-existence of closed orbit is discussed in view of Dulac function. By using Hopf bifurcation theory, some sufficient conditions for the existence of limit cycles are obtained. Furthermore, with the theorem . . pkac and . . . e , some sufficient conditions for the uniqueness and stability for limit cycles of such systems are obtained.

Key words: planar system; limit cycle; existence; uniqueness

(责任编辑 向阳洁)

(上接第 17 页)

参考文献:

[1] 郑 华. 关于满秩矩阵集合的两个性质[J]. 韶关学院学报, 2008, 29(9): 6- 8.

[2] 陈飞翔, 武忠祥. 一类关于矩阵范数的不等式及其应用[J]. 河南科学, 2009, 27(2): 137- 139.

[3] 吕炯兴. 几个矩阵范数不等式及其在谱扰动理论中的应用[J]. 高等学校计算数学学报, 2001, 6(2): 162- 169.

[4] WATHIQ BANI-DONI, FUAD KITTANEH. Norm Equalities and Inequalities for Operator Matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 429: 57- 67.

[5] ROGER A HORN, CHARLES R JOHNSON. Matrix Aanlysis[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.

On Matrix Inequality of Unitary Invariant Norm

ZHANG Li-juan, REN Fang-guo

(College of Mathematics and Information Science, Shannxi Normal University, Xi. an 710062, China)

Abstract: Some inequalities are generalized from complex field to square matrices $\boldsymbol{M}_n$, and then the results about matrix inequalities are proved by means of the singular value decomposition and the properties of the unitary invariant norm.

Key words: unitary invariant norm; matrix inequalities; singular value decomposition

(责任编辑 向阳洁)