第 31卷 第 5期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 31 No. 5
2010年 9月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) Sept. 2010

文章编号: 1007-2985(2010)05-0029-05

一类约束矩阵方程的迭代解法*

汤 赛, 周富照
(长沙理工大学数学与计算科学学院, 湖南 长沙 410076)

摘 要: 对次对称和次反对称矩阵约束下一类矩阵方程的迭代解法进行了讨论, 利用次对称矩阵和次反对称矩阵的结构和性质, 分别构造了迭代算法, 并用矩阵范数的性质和拉直算子证明了迭代算法的有限步收敛性, 从而得到了矩阵方程的极小范数解和最佳逼近解.

关键词: 约束矩阵方程; 迭代解法; 极小范数解; 最佳逼近解; 次对称矩阵
中图分类号: O151.21 文献标志码: A

令 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 表示所有 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 实矩阵的集合; $KS\mathbf{R}^{m\times n}$ 表示所有 n 阶次对称矩阵的集合; $AKS\mathbf{R}^{m\times n}$ 表示所有 n 阶次反对称矩阵的集合; $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹; $\|\cdot\|$ 表示矩阵的 Frobenius 范数; $\mathrm{vec}(\cdot)$ 表示矩阵的拉直映射, $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Kronecker 积, $\mathrm{vec}(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{a}_i\in\mathbf{R}^m\ (i = 1, 2, \cdots, n)$; $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{e}_i$ 是 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 列 $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\boldsymbol{S}_n = (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{e}_1)$.

笔者主要研究下列问题的迭代解法:

问题Ⅰ 已知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $S\subset\mathbf{R}^{n\times n}$, 求 $\boldsymbol{X}\in S$, 使 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$.

问题Ⅱ 设问题Ⅰ相容, 且其解集合为 S_E, $\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 求 $\hat{\boldsymbol{X}}\in S_E$, 使得 $\|\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{X}_0\| = \min\limits_{\boldsymbol{X}\in S_E}\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|$, 其中 $\|\cdot\|$ 为 Frobenius 范数, S 为 $KS\mathbf{R}^{n\times n}$ 或 $AKS\mathbf{R}^{n\times n}$.

这类问题的研究情况见文献[1-6].

1 当 S 为 $KS\mathbf{R}^{n\times n}$ 时问题Ⅰ的解和问题Ⅱ的解

引理 1[3] 矩阵 $\boldsymbol{X}\in KS\mathbf{R}^{n\times n}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{S}_n\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}_n$.

引理 2[3] 若矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 则 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n\in KS\mathbf{R}^{n\times n}$, 且若矩阵 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\in KS\mathbf{R}^{n\times n}$, $\lambda_1, \lambda_2\in\mathbf{R}$, 则 $\lambda_1\boldsymbol{X}+\lambda_2\boldsymbol{Y}\in KS\mathbf{R}^{n\times n}$, 即 $KS\mathbf{R}^{n\times n}$ 是 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 的子空间.

构造迭代算法 A:

(ⅰ) 给定 $\boldsymbol{X}_1\in KS\mathbf{R}^{n\times n}$, 计算 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{Q}_1 = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n)$, $k := 1$.

(ⅱ) 计算 $\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{X}_k+\dfrac{\|\boldsymbol{R}_k\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_k\|}\boldsymbol{Q}_k$.

(ⅲ) 计算 $\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{k+1}$, $\boldsymbol{P}_{k+1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{k+1}$, $\boldsymbol{Q}_{k+1} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{P}_{k+1}+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n)-\dfrac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{Q}_k)}{\|\boldsymbol{Q}_k\|^2}\boldsymbol{Q}_k$. 若 $\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{0}$,

* 收稿日期: 2010-08-01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671026)
作者简介: 汤 赛(1988-), 女, 湖南醴陵人, 长沙理工大学数学与计算科学学院本科生, 主要从事数值代数研究; 周富照(1964-), 男, 湖南涟源人, 长沙理工大学数学与计算科学学院教授, 主要从事数值代数研究.

或者 $\boldsymbol{R}_{k+1}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{Q}_{k+1}=\boldsymbol{0}$,则停止;否则 $k:=k+1$,转(ii).

由迭代算法A及引理2显然可知 $\boldsymbol{Q}_i\in KS\mathbf{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{X}_i\in KS\mathbf{R}^{n\times n}$, $i=1,2,\cdots$.

引理3 对迭代算法A中的 $\boldsymbol{R}_i,\boldsymbol{P}_j,\boldsymbol{Q}_i$, $i,j=1,2,\cdots$,有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)-\frac{\|\boldsymbol{R}_i\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_i\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{T}}).$$

证明 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{i+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)=\mathrm{tr}((\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{i+1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)=\mathrm{tr}((\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_i+\frac{\|\boldsymbol{R}_i\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_i\|^2}\boldsymbol{Q}_i))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)=\mathrm{tr}((\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)-\frac{\|\boldsymbol{R}_i\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_i\|^2}\mathrm{tr}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)-\frac{\|\boldsymbol{R}_i\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_i\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)-\frac{\|\boldsymbol{R}_i\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_i\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{T}}).$

引理4 对迭代算法A中的 $\boldsymbol{R}_i,\boldsymbol{Q}_i$, $k\geqslant 2$,有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)=0,\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j)=0\qquad i,j=1,2,\cdots,k;\ i\neq j \tag{1}$$

证明 用数学归纳法.

当 $k=2$时,注意到 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{S}_n$,由引理3及迭代算法A,知

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1)-\frac{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_1\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}})=\|\boldsymbol{R}_1\|^2-\frac{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_1\|^2}\mathrm{tr}(\frac{\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}}{2})=\|\boldsymbol{R}_1\|^2-\frac{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_1\|^2}\mathrm{tr}(\frac{\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{S}_n}{2})=\|\boldsymbol{R}_1\|^2-\frac{\|\boldsymbol{R}_1\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_1\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1\cdot(\frac{\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2})^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)-\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)}{\|\boldsymbol{Q}_1\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)=0,$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)=\mathrm{tr}((\frac{\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2}-\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)}{\|\boldsymbol{Q}_1\|^2}\boldsymbol{Q}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)=\mathrm{tr}((\frac{\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)-\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)}{\|\boldsymbol{Q}_1\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)=\mathrm{tr}(\frac{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Q}_1}{2})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)=\mathrm{tr}(\frac{\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)-\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)=0$$

假设 $k=t\geqslant 2$时,(1)式成立.注意到 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{t-1})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{Q}_{t-1}^{\mathrm{T}})=0$,则由引理3及迭代算法A,有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_t)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_t)-\frac{\|\boldsymbol{R}_t\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_t^{\mathrm{T}})=\|\boldsymbol{R}_t\|^2-\frac{\|\boldsymbol{R}_t\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\frac{\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_t^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_t^{\mathrm{T}}}{2})=\|\boldsymbol{R}_t\|^2-\frac{\|\boldsymbol{R}_t\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\frac{\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_t^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{S}_n}{2})=\|\boldsymbol{R}_t\|^2-\frac{\|\boldsymbol{R}_t\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t\cdot(\frac{\boldsymbol{P}_t+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2})^{\mathrm{T}})=\|\boldsymbol{R}_t\|^2-\frac{\|\boldsymbol{R}_t\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}})=0,$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)=\mathrm{tr}((\frac{\boldsymbol{P}_{t+1}+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2}-\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\boldsymbol{Q}_t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)=\mathrm{tr}(\frac{\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_{t+1}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Q}_t}{2})-\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)=\mathrm{tr}(\frac{\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t+\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\boldsymbol{Q}_t+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2})-\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)-\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)=0$$

对 $j=1$于,由引理3容易得到 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{s+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)=0$.注意到$j=2,3,\cdots,s-1$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)=0$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j)=0$,则由引理3及迭代算法A,有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j)-\frac{\|\boldsymbol{R}_t\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{T}})=-\frac{\|\boldsymbol{R}_t\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\frac{\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{T}}}{2})=-\frac{\|\boldsymbol{R}_t\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t\cdot(\frac{\boldsymbol{P}_j+\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2})^{\mathrm{T}})=-\frac{\|\boldsymbol{R}_t\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t\cdot(\boldsymbol{Q}_j+\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{j-1})}{\|\boldsymbol{Q}_{j-1}\|^2}\boldsymbol{Q}_{j-1})^{\mathrm{T}})=-\frac{\|\boldsymbol{R}_t\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j)+\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{j-1})}{\|\boldsymbol{Q}_{j-1}\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{j-1}))=0$$

而对于 $j = 2, 3, \cdots, s-1$, 有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j) = \mathrm{tr}((\frac{\boldsymbol{P}_{t+1} + \boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2} - \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\boldsymbol{Q}_t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j) = \mathrm{tr}(\frac{\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j + \boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_{t+1}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Q}_j}{2}) -$$

$$\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j) = \mathrm{tr}(\frac{\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j + \boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_{t+1}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Q}_j}{2}) - \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j) =$$

$$\mathrm{tr}(\frac{\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j + \boldsymbol{P}_{j+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{Q}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}).$$

利用引理 3, 注意到 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j) = 0$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{j+1}) = 0$, 有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_j) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}) = \frac{\|\boldsymbol{Q}_j\|^2}{\|\boldsymbol{R}_j\|^2}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{t+1}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{j+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{t+1})) =$$

$$\frac{\|\boldsymbol{Q}_j\|^2}{\|\boldsymbol{R}_j\|^2}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{j+1})) = 0,$$

即 $k = t+1$时, (1) 式成立.

由数学归纳法知引理 4成立.

引理 5　设 $\bar{\boldsymbol{X}} \in KS\mathbf{R}^{n\times n}$ 为问题 I 的任一个解, 则

$$\mathrm{tr}(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_k)\boldsymbol{Q}_k^{\mathrm{T}} = \|\boldsymbol{R}_k\|^2 \qquad k = 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

证明　用数学归纳法.

当 $k = 1$时, 注意到 $\boldsymbol{S}_n(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n = \bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_k$, 有

$$\mathrm{tr}(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} = \mathrm{tr}((\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_1)\cdot(\frac{\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2})^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(\frac{(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_n(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}}{2}) =$$

$$\mathrm{tr}((\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}((\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_1)(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1)^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}((\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}) =$$

$$\mathrm{tr}((\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}) = \|\boldsymbol{R}_1\|^2,$$

即

$$\mathrm{tr}(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} = \|\boldsymbol{R}_1\|^2. \tag{3}$$

设 $k = t$时, (2) 式成立. 由于

$$\mathrm{tr}(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}} = \mathrm{tr}(((\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_t) - \frac{\|\boldsymbol{R}_t\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\boldsymbol{Q}_t)\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_t)\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}} - \frac{\|\boldsymbol{R}_t\|^2}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}) =$$

$$\|\boldsymbol{R}_t\|^2 - \|\boldsymbol{R}_t\|^2 = 0,$$

因此, 由迭代算法 A 并注意到 $\boldsymbol{S}_n(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n = \bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1}$, 有

$$\mathrm{tr}((\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})\boldsymbol{Q}_{t+1}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}((\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})(\frac{\boldsymbol{P}_{t+1} + \boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n}{2} - \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\boldsymbol{Q}_t)^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}((\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})\cdot\frac{\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_{t+1}\boldsymbol{S}_n}{2}) -$$

$$\frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_t)}{\|\boldsymbol{Q}_t\|^2}\mathrm{tr}((\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})\boldsymbol{Q}_t^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(\frac{(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})\cdot\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}} + (\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_{t+1}\boldsymbol{S}_n}{2}) =$$

$$\mathrm{tr}(\frac{(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})\cdot\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_n(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}}{2}) = \mathrm{tr}((\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}).$$

与 (3) 式完全类似的证法, 有

$$\mathrm{tr}((\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})\boldsymbol{Q}_{t+1}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}((\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X}_{t+1})\boldsymbol{P}_{t+1}^{\mathrm{T}}) = \|\boldsymbol{R}_{t+1}\|^2.$$

由数学归纳法知 (2) 式成立.

利用迭代算法 A及引理 3, 引理 4和引理 5可得到如下结论:

定理 1　设问题I 相容, 则对任一初始矩阵 $\boldsymbol{X}_1 \in KS\mathbf{R}^{n\times n}$, 迭代算法 A经过有限步终止问题I 的一个解.

证明　若 $\boldsymbol{R}_i \neq \boldsymbol{0}$, $i = 1, 2, \cdots, mn$, 则由引理 4可知 $\boldsymbol{Q}_i \neq \boldsymbol{0}$, $i = 1, 2, \cdots, mn$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_{mn+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, mn$, 而 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_j) = 0$, $i, j = 1, 2, \cdots, mn$, $i \neq j$, 所以 $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \cdots, \boldsymbol{R}_{mn}$ 是矩阵空间 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 的一组正交基, 于是有 $\boldsymbol{R}_{mn+1} = \boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{X}_{mn+1}$ 为问题 I 的一个解.

引理 6[4]　设相容线性方程组 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ 的一个解 $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbf{R}(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})$, 则 $\boldsymbol{y}_0$ 必为此方程组的唯一的极小范数解.

引理 7[3] 矩阵方程 $AX = B$ 有次对称解的充要条件是如下矩阵方程组相容:

$$\begin{cases} AX = B, \\ AS_nX^{\mathrm{T}}S_n = B. \end{cases} \tag{4}$$

定理 2 设问题 Ⅰ 是相容的,若取初值 $X_1 = A^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} + S_nHAS_n$, H 为任意 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 矩阵,特别地,取 $X_1 = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^{n\times n}$,则由迭代算法 A 经过有限步终止于问题 Ⅰ 的唯一的极小范数解.

证明 若取 $X_1 = A^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} + S_nHAS_n$, H 为任意 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 矩阵,经过有限步迭代可得到问题 Ⅰ 的解 X^*,且 X^* 可表示为 $X^* = A^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} + S_nYAS_n$.

下面证明 X^* 即为问题 Ⅰ 的极小范数解.

由引理 6 可知,X^* 必为方程组 (4) 的解,因此要证明 X^* 为问题 Ⅰ 的极小范数解,只要证明 X^* 为矩阵方程组 (4) 的极小范数解即可.

记 $\mathrm{vec}(X^*) = x^*$, $\mathrm{vec}(X) = x$, $\mathrm{vec}(Y^{\mathrm{T}}) = y_1$, $\mathrm{vec}(Y) = y_2$, $\mathrm{vec}(B) = b$,则矩阵方程组 (4) 等价于线性方程组

$$\begin{pmatrix} I\otimes A \\ S_n\otimes(A^{\mathrm{T}}S_n) \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}. \tag{5}$$

而

$$x^* = \mathrm{vec}(X^*) = \mathrm{vec}(A^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} + S_nYAS_n) = I\otimes A^{\mathrm{T}}y_1 + S_n\otimes(S_nA)y_2 = (I\otimes A^{\mathrm{T}}, S_n\otimes(S_nA))\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I\otimes A \\ S_n\otimes(A^{\mathrm{T}}S_n) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}\left(\begin{pmatrix} I\otimes A \\ S_n\otimes(A^{\mathrm{T}}S_n) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right),$$

所以有 x^* 是相容线性方程组 (5) 的唯一的极小范数解,又因为拉直映射是同构的,所以 X^* 是矩阵方程组 (4) 的唯一的极小范数解,从而也是问题 Ⅰ 的唯一的极小范数解.

利用迭代算法 A,若问题 Ⅰ 有解,则迭代算法 A 经过有限步终止于问题 Ⅰ 的一个解.若取特殊的初始矩阵 $X_1 = A^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} + S_nHAS_n$, H 为任意 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 矩阵,特别地,取 $X_1 = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^{n\times n}$,可迭代得出问题 Ⅰ 的唯一的极小范数次对称解.

可假设问题 Ⅱ 中给定的 $X_0 \in KS\mathbf{R}^{n\times n}$,若问题 Ⅰ 相容,即问题 Ⅰ 的解集 S_E 非空,当 $X \in S_E$ 时,由 $AX = B$ 可得 $A(X - X_0) = B - AX_0$.

令 $\tilde{X} = X - X_0$, $\tilde{B} = B - AX_0$,则问题 Ⅱ 等价于求相容方程

$$A\tilde{X} = \tilde{B} \tag{6}$$

的极小范数次对称解 $\tilde{X}^*$.

利用迭代算法 A,取特殊初始矩阵 $\tilde{X}_1 = A^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} + S_nHAS_n$, H 为任意 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 矩阵,特别地,取 $\tilde{X}_1 = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^{n\times n}$,可得矩阵方程 (6) 的唯一的极小范数次对称解 $\tilde{X}^*$,从而得问题 Ⅱ 的解 $\hat{X} = \tilde{X}^* + X_0$.

2 S 为 $AKS\mathbf{R}^{n\times n}$ 时问题 Ⅰ 的解和问题 Ⅱ 的解

引理 8[3] 矩阵 $X \in AKS\mathbf{R}^{n\times n}$ 的充要条件是 $X^{\mathrm{T}} = -S_nXS_n$.

引理 9[3] 若矩阵 $X \in \mathbf{R}^{n\times n}$,则 $X - S_nX^{\mathrm{T}}S_n \in AKS\mathbf{R}^{n\times n}$,且若矩阵 $X, Y \in AKS\mathbf{R}^{n\times n}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$,则 $\lambda_1X + \lambda_2Y \in AKS\mathbf{R}^{n\times n}$,即 $AKS\mathbf{R}^{n\times n}$ 是 $X \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 的子空间.

构造迭代算法 B:

(ⅰ) 给定 $X_k \in AKS\mathbf{R}^{n\times n}$,计算 $R_1 = B - AX_1$, $P_1 = A^{\mathrm{T}}R_1$, $Q_1 = \frac{1}{2}(P_1 - S_nP_1^{\mathrm{T}}S_n)$, $k := 1$.

(ⅱ) 计算 $X_{k+1} = X_k + \frac{\|R_k\|^2}{\|Q_k\|}Q_k$.

(ⅲ) 计算 $R_{k+1} = B - AX_{k+1}$, $P_{k+1} = A^{\mathrm{T}}R_{k+1}$, $Q_{k+1} = \frac{1}{2}(P_{k+1} - S_nP_{k+1}^{\mathrm{T}}S_n) - \frac{\mathrm{tr}(P_{k+1}Q_k)}{\|Q_k\|^2}Q_k$.若 $R_{k+1} = \mathbf{0}$,或者 $R_{k+1} \neq \mathbf{0}$, $Q_{k+1} = \mathbf{0}$,则停止;否则 $k := k+1$,转(ⅱ).

由迭代算法 B及引理 9显然可知, $Q_i \in AKS\mathbf{R}^{n\times n}$, $X_i \in AKS\mathbf{R}^{n\times n}$, $i = 1, 2, \cdots$.

与 S 为 $KS\mathbf{R}^{n\times n}$ 时相类似, 可得到下列结论:

定理 3　设问题 Ⅰ 相容, 则对任一初始矩阵 $X_1 \in AKS\mathbf{R}^{n\times n}$, 迭代算法 B经过有限步终止问题 Ⅰ 的一个解.

引理 10　矩阵方程 $AX = B$ 有次反对称解的充要条件是如下矩阵方程组相容:

$$\begin{cases} AX = B, \\ AS_nX^{\mathrm{T}}S_n = -B. \end{cases}$$

定理 4　设问题 Ⅰ 是相容的, 若取初值 $X_1 = A^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} - S_nHAS_n$, H 为任意 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 矩阵, 特别地, 取 $X_1 = 0 \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 则由迭代算法 B经过有限步终止于问题 Ⅰ 的唯一的极小范数解.

利用迭代算法 B, 取特殊初始矩阵 $X_1 = A^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} - S_nHAS_n$, H 为任意 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 矩阵, 特别地, 取 $X_1 = 0 \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 可得与问题 Ⅱ 等价的矩阵方程的唯一的极小范数次反对称解 X^*, 从而得问题 Ⅱ 的解 $X = X^* + X_0$.

用迭代算法求解矩阵方程虽然有其优点, 但也有很多需要进一步研究的工作, 如迭代误差的处理、迭代速度的分析、迭代算法的改进等.

参考文献:

[1]　路易斯• 汉格曼, 大卫• 杨. 实用迭代法 [M]. 蔡大用, 施妙根, 译. 北京: 清华大学出版社, 1984: 10-280

[2]　李庆扬. 数值分析 [M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2000: 20-280.

[3]　周富照, 张忠志, 胡锡炎. 一类次对称矩阵反问题的最小二乘解 [J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2001(2): 6-10

[4]　彭亚新. 求解约束矩阵方程及其最佳逼近的迭代解法 [D]. 长沙: 湖南大学, 2004.

[5]　周富照, 赵人可, 张忠志. 线性流形上次对称矩阵的最佳逼近 [J]. 长沙交通学院学报, 2002, 18(1): 1-5.

[6]　周富照, 张忠志. 线性流形上次反对称矩阵的最佳逼近 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2001(4): 14-18

Iterative Methods of a Kind of Constrained Matrix Equations

TANG Sai, ZHOU Fu-zhao

(College of Mathematics and Computing Science, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, China)

Abstract: The iterative methods of the matrix equations constrained by skew-symmetric matrices and skew-anti-symmetric matrices are studied. The iterative methods are constructed and its limited convergence is proved by means of the properties of matrix's norm and straighten operator and by using their structures and properties. Therefore, the least-norm solution and optimal approximation solution of the matrix equations are obtained.

Key words: constrained matrix equation; iterative method; least-norm solution; optimal approximation solution; skew-symmetric matrix

(责任编辑　向阳洁)