文章编号: 1007-2985(2010)05-0019-03

一类偶数阶中立型非线性微分方程振动性*

韩振来, 韩 猛, 李同兴, 孙 莹
(济南大学理学院, 山东 济南 250022)

摘 要: 利用 Riccati变换技术研究了一类偶数阶中立型系数振动的混合非线性时滞微分方程的振动性, 得到了该类方程所有有界解振动或者收敛于 0的几个新的充分条件.

关键词: 振动性; 中立型微分方程; 振动系数; 混合非线性
中图分类号: O175.7 文献标志码: A

1 问题的提出

生物学、工程技术、控制科学等学科的发展, 使得微分方程的定性理论研究引起学者的广泛兴趣, 振动性理论作为定性理论的一个重要分支, 成果丰富[1-12]. Agarwal R P等[3]研究了高阶非线性微分方程 $((x^{(n-1)}(t))^{\alpha})'+q(t)f(x(g(t)))=0$的振动性. 孟凡伟[4]运用 Riccati变换技术研究了偶数阶非线性中立型时滞微分方程 $(r(t)|(x(t)+p(t)x(t-\tau))^{(n-1)}|^{\alpha-1}(x(t)+p(t)x(t-\tau))^{(n-1)})'+q(t)f(x(\sigma(t)))=0$的振动性, 这里 $t\geqslant t_0$, $0\leqslant p(t)<1$. 徐志庭[5]运用 Riccati变换技术研究了偶数阶时滞微分方程 $(|(x(t))^{(n-1)}|^{\alpha-1}(x(t))^{(n-1)})'+F(t,x(g(t)))=0$的振动性. 韩振来[6]研究了二阶中立型时滞微分方程 $(r(t)\psi(x(t))|(x(t)+p(t)x(t-\tau))'|^{\alpha-1}(x(t)+p(t)x(t-\tau))')'+q(t)f(x(\sigma(t)))=0$的振动性. 具有混合非线性的微分方程在一些细菌增长模型中有重要应用[7].

笔者研究如下形式的高阶中立型系数振动的混合非线性时滞微分方程:

$$(|(x(t)+p(t)x(\sigma(t)))^{(n-1)}|^{\alpha-1}(x(t)+p(t)x(\sigma(t)))^{(n-1)})'+q_0(t)|x(\tau_0(t))|^{\alpha-1}x(\tau_0(t))+q_1(t)|x(\tau_1(t))|^{\beta-1}x(\tau_1(t))+q_2(t)|x(\tau_2(t))|^{\gamma-1}x(\tau_2(t))=0\quad t\geqslant t_0 \tag{1}$$

这里: $q_i\in C([t_0,\infty),\mathbf{R}^+)$, $i=0,1,2$; $\tau_i(t)\in C([t_0,\infty),\mathbf{R})$, $\tau_i(t)\leqslant t$; 存在 $\sigma(t)\in C([t_0,\infty),\mathbf{R})$, $\sigma(t)\leqslant t$, $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=\infty$; 存在 $\tau(t)\in C^1([t_0,\infty),\mathbf{R})$, $\tau(t)\leqslant\tau_i(t)$, $i=0,1,2$, $\tau(t)\leqslant t$, $\tau'(t)>0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$; $\gamma>\alpha>\beta>0$.

孙元功[7]研究了方程(1)当 $p(t)=0$, $n=2$时的振动性. 方程(1)在形式上具有一般性, 因此研究方程(1)是有意义的.

2 相关引理

引理 1[8] 设 $u(t)\in C^n([t_0,\infty),\mathbf{R}^+)$. 若 $u^{(n)}(t)$最终常号, 对所有充分大的 t, 则存在 $t_x\geqslant t_0$, 整数 l, $0\leqslant l\leqslant n$, 当 $u^{(n)}(t)\geqslant 0$, $n+l$为偶数, 或者当 $u^{(n)}(t)\leqslant 0$, $n+l$为奇数, 使得: (i) $l>0$推出 $u^{(k)}(t)>0$, $k=0,1,\cdots,l-1$, $t\geqslant t_x$; (ii) $l\leqslant n-1$, 推出 $(-1)^{l+k}u^{(k)}(t)>0$, $k=l,l+1,\cdots,n-1$, $t\geqslant t_x$.

引理 2[8] 设函数 u如引理 1, 且 $u^{(n-1)}(t)u^{(n)}(t)\leqslant 0$, $t\geqslant t_x$, 则对任意的 λ, $0<\lambda<1$, 对所有充分大的 t, 有 $u(\lambda t)\geqslant\dfrac{2^{1-n}}{(n-1)!}(\dfrac{1}{2}-|\lambda-\dfrac{1}{2}|)^{n-1}t^{n-1}|u^{(n-1)}(t)|$.

引理 3[2,8] 考虑半线性微分方程

---

* 收稿日期: 2010-04-12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60904024); 山东省自然科学基金资助项目(Y2008A28, ZR2009AL003); 济南大学博士基金(XBS0843)
作者简介: 韩振来(1962-), 男, 山东济南人, 济南大学理学院教授, 博士, 主要从事微分方程及其应用研究.

$$(a(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t))'+q(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t)=0,\tag{2}$$

这里 $\alpha>0$, $a(t), q(t)\in C([t_0,\infty),\mathbf{R}^+)$. 则方程(2)非振动当且仅当存在实数 $T\geqslant t_0$, 函数 $v(t)\in C^1([t_0,\infty),\mathbf{R})$, 使得 $v'(t)+\alpha a^{-1/\alpha}(t)|v(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}+q(t)\leqslant 0$, $t\in[T,\infty)$.

3 主要结果与证明

文中定义函数 $z(t)=x(t)+p(t)x(\sigma(t))$, 并假设条件(H): $p(t)$是振动函数, 且 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=0$.

定理 1 设条件(H)成立. n是偶数, 存在常数 λ, $0<\lambda<1$, 使得

$$\lim_{t\to\infty}\sup g(n,\lambda)\tau^{n-1}(t)\{h(t)+\alpha f(n,\lambda)\int_t^\infty\tau^{n-2}(s)\tau'(s)h^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\,\mathrm{d}s\}^{1/\alpha}>1.$$

这里: $Q(t):=\frac{1}{2^\alpha}(q_0(t)+(k_1q_1(t))^{\frac{1}{k_1}}(k_2q_2(t))^{\frac{1}{k_2}})$; $k_1:=\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$, $k_2:=\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$; $h(t):=\int_t^\infty Q(s)\,\mathrm{d}s$; $f(n,\lambda):=\frac{\lambda 2^{2-n}}{(n-2)!}(\frac{1}{2}-|\lambda-\frac{1}{2}|)^{n-2}$; $g(n,\lambda):=\frac{2^{1-n}}{(n-1)!}(\frac{1}{2}-|\lambda-\frac{1}{2}|)^{n-1}$. 那么方程(1)的所有有界解或者振动或者收敛于 0.

证明 假设方程(1)存在有界非振动解 $x(t)$. 不失一般性, 假设存在 $t_1\geqslant t_0$, 使 $x(t)>0$, $x(\sigma(t))>0$, $x(\tau(t))>0$, $t\geqslant t_1$. 则由方程(1)得到 $(|z^{(n-1)}(t)|^{\alpha-1}z^{(n-1)}(t))'\leqslant 0$, $t\geqslant t_1$. 进一步假设 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)\neq 0$, 由条件(H)知 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)x(\sigma(t))=0$, 则存在 $t_2\geqslant t_1$ 使 $z(t)=x(t)+p(t)x(\sigma(t))>0$, $t\geqslant t_2$. 即 $z(t)$最终为正且有界, 故类似文献[5]中定理 2.1的证明, 存在 $t_3\geqslant t_2$, 当 $t\geqslant t_3$ 时, 有

$$z^{(n)}(t)\leqslant 0,\quad (-1)^{1+k}z^{(k)}(t)>0\qquad k=1,2,\cdots,n-1.\tag{3}$$

特别地, $z'(t)>0$, $t\geqslant t_3$. 故存在 $t_4\geqslant t_3$, 有 $x(t)=z(t)-p(t)x(\sigma(t))\geqslant\frac{z(t)}{2}$, $t\geqslant t_4$. 所以由方程(1)得

$$((z^{(n-1)}(t))^\alpha)'+\frac{1}{2^\alpha}q_0(t)z^\alpha(\tau(t))+\frac{1}{2^\beta}q_1(t)z^\beta(\tau(t))+\frac{1}{2^\gamma}q_2(t)z^\gamma(\tau(t))\leqslant 0\qquad t\geqslant t_5\geqslant t_4.\tag{4}$$

因为 $z'(t)>0$, 所以由引理 2与(3)式, 存在 $t_6\geqslant t_5$, 对任意的 $0<\lambda<1$, 使

$$z'(\lambda\tau(t))\geqslant\frac{2^{2-n}}{(n-2)!}(\frac{1}{2}-|\lambda-\frac{1}{2}|)^{n-2}\tau^{n-2}(t)z^{(n-1)}(\tau(t))\geqslant\frac{f(n,\lambda)}{\lambda}\tau^{n-2}(t)z^{(n-1)}(t).\tag{5}$$

对任意的 $0<\lambda<1$, 定义函数 $\omega(t)=(\frac{z^{(n-1)}(t)}{z(\lambda\tau(t))})^\alpha$, $t\geqslant t_6$, 则 $\omega(t)>0$, $t\geqslant t_6$. 对 $\omega(t)$ 微分得到

$$\omega'(t)=\frac{((z^{(n-1)}(t))^\alpha)'}{z^\alpha(\lambda\tau(t))}-\alpha\lambda\tau'(t)\frac{(z^{(n-1)}(t))^\alpha z'(\lambda\tau(t))}{z^{\alpha+1}(\lambda\tau(t))}.$$

所以由(4)和(5)式得到

$$\omega'(t)\leqslant-\frac{1}{2^\alpha}q_0(t)-\frac{1}{2^\beta}q_1(t)z^{\beta-\alpha}(\tau(t))-\frac{1}{2^\gamma}q_2(t)z^{\gamma-\alpha}(\tau(t))-\alpha f(n,\lambda)\tau^{n-2}(t)\tau'(t)\omega^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t).$$

令 $\alpha=k_1\frac{1}{2^\beta}q_1(t)z^{\beta-\alpha}(\tau(t))$, $b=k_1\frac{1}{2^\gamma}q_2(t)z^{\gamma-\alpha}(\tau(t))$, 由不等式 $\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\geqslant a^{1/p}a^{1/q}$, 有

$$\frac{1}{2^\beta}q_1(t)z^{\beta-\alpha}(\tau(t))+\frac{1}{2^\gamma}q_2(t)z^{\gamma-\alpha}(\tau(t))\geqslant(k_1\frac{1}{2^\beta}q_1(t)z^{\beta-\alpha}(\tau(t)))^{1/k_1}(k_2\frac{1}{2^\gamma}q_1(t)z^{\gamma-\alpha}(\tau(t)))^{1/k_2}=\frac{1}{2^\alpha}(k_1q_1(t))^{1/k_1}(k_2q_2(t))^{1/k_2}.$$

所以可得

$$\omega'(t)\leqslant-Q(t)-\alpha f(n,\lambda)\tau^{n-2}(t)\tau'(t)\omega^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t).\tag{6}$$

对(6)式从 t到 $T\geqslant t$积分, 并令 $T\to\infty$, 得到

$$(z^{(n-1)}(t))^\alpha\geqslant z^\alpha(\lambda\tau(t))\{h(t)+\alpha f(n,\lambda)\int_t^\infty\tau^{n-2}(s)\tau'(s)\omega^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\,\mathrm{d}s\}.\tag{7}$$

由(7)式最终有 $\omega(t)\geqslant h(t)$, 故

$$\frac{z^{(n-1)}(t)}{z(\lambda\tau(t))}\geqslant\{h(t)+\alpha f(n,\lambda)\int_t^\infty\tau^{n-2}(s)\tau'(s)h^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\,\mathrm{d}s\}^{1/\alpha}.\tag{8}$$

由引理 2与(3)式, 对任意的 $0<\lambda<1$, 最终有 $z(\lambda\tau(t))\geqslant g(n,\lambda)\tau^{n-1}(t)z^{n-1}(t)$. 因此由(8)式得

$$1\geqslant g(n,\lambda)\tau^{n-1}(t)\{h(t)+\alpha f(n,\lambda)\int_t^{\infty}\tau^{n-2}(s)\tau'(s)h^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\mathrm{d}s\}^{1/\alpha}.$$

这与已知条件矛盾. 证毕.

定理 2　设条件(H)成立. n是偶数, 若存在常数 λ, $0<\lambda<1$, 使得方程

$$\left(\left(\frac{1}{f(n,\lambda)\tau^{n-2}(t)\tau'(t)}\right)^{\alpha}|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right)'+Q(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t)=0$$

振动. 这里 $Q(t)$, $f(n,\lambda)$ 同定理 1. 那么方程(1)的所有有界解或者振动或者收敛于 0.

证明　假设方程(1)存在有界非振动解 $x(t)$. 不失一般性, 假设存在 $t_1\geqslant t_0$, 使 $x(t)>0$, $x(\sigma(t))>0$, $x(\tau(t))>0$, $t\geqslant t_1$. 则由定理 1的证明, 对任意的 $0<\lambda<1$, 最终有

$$\omega'(t)+Q(t)+\alpha\left(\left(\frac{1}{f(n,\lambda)\tau^{n-2}(t)\tau'(t)}\right)^{\alpha}\right)^{-1/\alpha}\omega^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)\leqslant 0$$

所以根据引理 3, 方程

$$\left(\left(\frac{1}{f(n,\lambda)\tau^{n-2}(t)\tau'(t)}\right)^{\alpha}|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right)'+Q(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t)=0$$

非振动. 这与已知矛盾. 证毕.

参考文献:

[1] 赵以阁, 孙书荣. Sturm-Liouville特征值问题 [J]. 济南大学学报: 自然科学版, 2009, 23(3): 299-301.

[2] 陈维松, 韩振来. 几类微分方程解的渐近性 [J]. 济南大学学报: 自然科学版, 2009, 23(3): 296-298.

[3] AGARWAL R P, GRACE S R. Oscillation Theorems for Certain Functional Differential Equations of Higher Order [J]. Math. Comput Modelling, 2004, 39: 1 185-1 194.

[4] MENG Fan-wei, XU Run. Oscillation Criteria for Certain Even Order Quasi-Linear Neutral Differential Equations with Deviating Arguments [J]. Appl Math Comput, 2007, 190: 458-464.

[5] XU Zhi-ting, XIA Yong. Integral Averaging Technique and Oscillation of Certain Even Order Delay Differential Equations [J]. J Math Anal Appl, 2004, 292: 238-246.

[6] HAN Zhen-lai, LI Tong-xing, SUN Shu-rong, et al. Remarks on the Paper [Appl Math Comput 207 (2009) 388-396] [J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 215: 3 998-4 007.

[7] SUN Yuan-gong, MENG Fan-wei. Oscillation of Second-Order Delay Differential Equations with Mixed Nonlinearities [J]. Appl Math Comput, 2009, 207(1): 135-139.

[8] PHILOS CH G. A New Criteria for the Oscillatory and Asymptotic Behavior of Delay Differential Equations [J]. Bull Acad Pol Sci Ser Sci Mat, 1981, 39: 61-64.

[9] 李同兴, 韩振来, 孙书荣. 二阶 Emden-Fowler中立型时滞微分方程振动性 [J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2009, 30(1): 27-29.

[10] 赵以阁, 孙书荣. 一类三阶非线性中立型时滞差分方程的振动性 [J]. 北京工商大学学报: 自然科学版, 2009, 27(5): 65-67.

[11] 曹凤娟, 韩振来. 具偏差变元 p-Laplace微分方程周期解存在性 [J]. 济南大学学报: 自然科学版, 2010, 24(1): 95-98.

[12] 李同兴, 韩振来. 一类具振动系数的二阶中立型 Emden-Fowler差分方程的振动准则 [J]. 济南大学学报: 自然科学版, 2009, 23(4): 410-413.

Oscillation of Even Order Neutral Nonlinear Differential Equation

HAN Zhen-lai, HAN Meng, LI Tong-xing, SUN Ying
(School of Sciences, University of Jinan, Jinan 250022, China)

Abstract By means of Riccati transformation technique, this paper establishes some new criteria which guarantee all bounded solutions either oscillate or converge to zero for a class of even order neutral differential equation with mixed nonlinearities and oscillating coefficient.

Key words oscillation; neutral differential equations; oscillating coefficient; mixed nonlinearities

(责任编辑　向阳洁)