文章编号: 1007-2985(2009)04-0019-04

一种拟 Grünwald 插值算子在 $B_{a,\phi}$ 空间中的收敛速度*

夏　颖, 许贵桥
(天津师范大学数学科学学院, 天津　300387)

摘　要: 给出了以第 2 类 Chebyshev 多项式的零点为插值结点组的拟 Grünwald 插值多项式 $G_n^*(f,x)$ 在 $B_{a,\phi}$ 空间中收敛速度的估计.

关键词: Chebyshev 多项式; 拟 Grünwald 插值多项式; 收敛速度
中图分类号: O174.41　　文献标识码: A

1　相关定义及主要结果

设 $B=\{L_{p_1},L_{p_2},\cdots,L_{p_m},\cdots\}(p_m>1,m=1,2,3,\cdots)$ 是一列 L_p 空间, $a=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,\cdots\}$ 是一个非负实数列. 如果对于 $f(x)\in\bigcap_{m=1}^{\infty}L_{p_m}$, 存在一个实数 $\alpha>0$ 使 $I(f,a)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\alpha^m\|f\|_{L_{p_m}}^m<+\infty$, 那么称 $f(x)\in Ba$, 且定义 $\|f\|_{Ba}=\inf\{\alpha>0:I(f,\alpha)\leqslant 1\}$ 为 $f(x)$ 在 Ba 空间中的范数. Ba 空间在上述意义下是完备的[1].

上述定义中, 如果取

$$B=\{L_p,L_p,\cdots,L_p,\cdots\},\ a=\{1,0,\cdots,0,\cdots\},$$

那么这时

$$I(f,\alpha)=\alpha\|f\|_{L_p},$$

而

$$\|f\|_{Ba}=\inf\{\alpha>0:I(f,\frac{1}{\alpha})=\frac{\|f\|_{L_p}}{\alpha}\leqslant 1\}=\|f\|_{L_p}.$$

这时 Ba 空间就变成了一般的 L_p 距离空间. 所以 Ba 空间是 L_p 空间的推广, Ba 空间中的结果自然包含 L_p 空间中的结果.

文中均假定 $\{a_m\}$ 满足 $\{a_m^{\frac{1}{m}}\}\in l^{\infty}$, 且 $p_0=\inf\limits_{m\geqslant 1}\{p_m\}>1$. 记 $q=\sup\limits_{m\geqslant 1}\{a_m^{\frac{1}{m}}\}$. 文中总假定 $\alpha>0$, $C(q,\cdots)$ 表示只与括号中的字母有关的常数, C 表示绝对正常数, 在不同处可以不同. 讨论中为了方便起见, 记 $\|f\|_p=\|f\|_{L_p}(1\leqslant p<+\infty)$, 当 $p=+\infty$ 时, 认为 $L_\infty=C$.

文中定义加权的 Ba 空间为 $B_{a,\phi}=\{L_{p_1,\phi},L_{p_2,\phi},\cdots,L_{p_m,\phi},\cdots\}$, 其中 $\phi(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, 且

$$\|f\|_{p,\phi}=\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\phi(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

设 $f(x)$ 为 $[-1,1]$ 上的连续函数, 则以第 2 类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)=U_n(\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ 的全部零点

$$\{x_k=\cos\frac{k\pi}{n+1}\}_{k=1}^{n}$$

为插值结点组的 f 的 Grünwald 插值多项式为 $G_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)l_k^2(x)$, 其中

$$l_k(x)=\frac{U_n(x)}{U_n'(x_k)(x-x_k)}\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

* 收稿日期: 2009-05-01
作者简介: 夏　颖(1987-), 女, 天津人, 主要从事函数逼近论研究; 许贵桥(1963-), 男, 河北栾城人, 教授, 博士, 主要从事函数逼近论研究.

文献[2]证明了 $G_n(f,x)$ 在 $(-1,1)$ 上处处收敛于 $f(x)$，而且是内闭一致收敛的. 文献[3]证明了 $G_n(f,x)$ 在 L_2 意义下不是收敛算子列，并给出了一种拟 Grünwald 插值多项式为 $G_n^*(f,x)=\sum_{k=0}^{n+1} f(x_k)\chi_k^2(x)$. 其中：

$$x_0=1,\ x_{n+1}=-1;$$

$$\chi_0(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}}\frac{U_n(x)}{U_n(1)},\ \chi_{n+1}(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}\frac{U_n(x)}{U_n(-1)};$$

$$\chi_k(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x_k^2}}l_k(x)\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

对任意 $f\in C_{[-1,1]}$，记 f 的对称差分为 $\Delta_{h\phi}f(x)=f(x-\frac{h\phi}{2})-f(x+\frac{h\phi}{2})$. 且定义函数 f 的光滑模为[4]

$$\omega_\phi(f,t)_\infty=\sup_{0<|h|\leqslant t}\|\Delta_{h\phi}f\|_\infty.$$

文献[3]证明了：对任意 $f\in C_{[-1,1]}$，有 $\|f-G_n^*\|_{\frac{1}{2},\phi}\leqslant C[\omega_\phi(f,\frac{1}{n})_\infty+\frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{n}}]$.

文献[4]将文献[3]的结果推广到 $0<p<\infty$. 笔者进一步得到如下结论：

定理1 设 $a=\{a_1,a_2,\cdots,a_m,\cdots\}$ 是非负实数列，$B=\{L_{p_1,\phi},L_{p_2,\phi},\cdots,L_{p_m,\phi},\cdots\}$ 是一列加权 L_p 空间 $(p_m>1,m=1,2,3,\cdots)$，当数列 $\{a_m^{\frac{1}{m}}\}\in l^\infty$ 时，若 $f\in C_{[-1,1]}$，则

$$\|G_n^*(f,x)-f(x)\|_{Ba,\phi}\leqslant C(q)(\omega_\phi(f,\frac{1}{n})_\infty+\frac{\|f\|_\infty}{n^{\frac{1}{p_0}}}),$$

其中 $q=\sup_{m\geqslant1}\{a_m^{\frac{1}{m}}\}$，$p_0=\inf_{m\geqslant1}\{p_m\}>1$，$\phi=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2 相关引理

关于 $\chi_k(x)$，由文献[3]知

$$\sum_{k=1}^{n}\chi_k^2(x)\leqslant 2. \tag{1}$$

引理1[4] 设 $f\in C_{[-1,1]}$，$p_n(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 $n(n>1)$ 次一致最佳逼近多项式，则

$$\|f(x)-p_n(x)\|_\infty\leqslant C\omega_\phi(f,\frac{1}{n})_\infty.$$

引理2 设 $p>1$，记 $L_k(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}U_n(x)}{x-x_k}(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$\|\sum_{k=1}^{n}|L_k(x)|\|_{p_m,\phi}\leqslant Cn^{2-\frac{1}{p_m}}.$$

证明 令 $x=\cos\theta$，则有

$$\left(\int_{-1}^{1}\left(\sum_{k=1}^{n}|L_k(x)|\right)^{p_m}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_m}}=\left(\sum_{s=0}^{n}\int_{\frac{s\pi}{n+1}}^{\frac{(s+1)\pi}{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin(n+1)\theta}{\cos\theta-\cos\frac{k\pi}{n+1}}\right|\right)^{p_m}\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p_m}}.$$

当 $1\leqslant s\leqslant[\frac{n}{2}]$，$\theta\in(\frac{s\pi}{n+1},\frac{(s+1)\pi}{n+1})$ 时，文献[5]已证明

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin(n+1)\theta}{\cos\theta-\cos\frac{k\pi}{n+1}}\right|\leqslant C\frac{\ln(s+2)}{s}n^2.$$

从而

$$\int_{\frac{s\pi}{n+1}}^{\frac{(s+1)\pi}{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin(n+1)\theta}{\cos\theta-\cos\frac{k\pi}{n+1}}\right|\right)^{p_m}\mathrm{d}\theta\leqslant\frac{\pi}{n+1}C\left(\frac{\ln(s+2)}{s}n^2\right)^{p_m},$$

$$\sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}\int_{\frac{s\pi}{n+1}}^{\frac{(s+1)\pi}{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin(n+1)\theta}{\cos\theta-\cos\frac{k\pi}{n+1}}\right|\right)^{p_m}\mathrm{d}\theta\leqslant\frac{\pi}{n+1}C\left(1+\sum_{s=1}^{[\frac{n}{2}]}\left(\frac{\ln(s+2)}{s}n^2\right)^{p_m}\right).$$

由 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln^{p_0}(1+k)}{k^{p_0}}$ 的收敛性及 $\frac{\ln^{p_m}(1+k)}{k^{p_m}}\leqslant\frac{\ln^{p_0}(1+k)}{k^{p_0}}$，可得 $\sum_{s=1}^{[\frac{n}{2}]}\left(\frac{\ln(s+2)}{s}n^2\right)^{p_m}\leqslant Cn^{2p_m}$. 因此，

$$\sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}\int_{\frac{s\pi}{n+1}}^{\frac{(s+1)\pi}{n+1}}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big|\frac{\sin(n+1)\theta}{\cos\theta-\cos\frac{k\pi}{n+1}}\Big|\Big)^{p_m}d\theta\leqslant Cn^{2p_m-1}.$$

类似地,

$$\sum_{s=[\frac{n}{2}]+1}^{n}\int_{\frac{s\pi}{n+1}}^{\frac{(s+1)\pi}{n+1}}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big|\frac{\sin(n+1)\theta}{\cos\theta-\cos\frac{k\pi}{n+1}}\Big|\Big)^{p_m}d\theta\leqslant Cn^{2p_m-1}.$$

引理 2 得证.

3　定理 1 的证明

设 $f\in C_{[-1,1]}$, $p_n(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的 $n(n>1)$ 次一致最佳逼近多项式, 则有

$$G_n^*(f,x)-f(x)=G_n^*(f-p_n,x)+G_n^*(p_n,x)-p_n(x)+p_n(x)-f(x). \tag{2}$$

由(1) 式及引理 1, 有

$$\begin{aligned}\|G_n^*(f-p_n,x)\|_{p_m,\phi}&=\Big(\int_{-1}^{1}|G_n^*(f-p_n,x)|^{p_m}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\Big)^{\frac{1}{p_m}}=\\&\Big(\int_{-1}^{1}\Big|\sum_{k=0}^{n+1}(f(x_k)-p_n(x_k))\chi_k^2(x)\Big|^{p_m}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\Big)^{\frac{1}{p_m}}\leqslant\\&\|f-p_n\|_\infty\Big(\int_{-1}^{1}\Big|\sum_{k=0}^{n+1}\chi_k^2(x)\Big|^{p_m}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\Big)^{\frac{1}{p_m}}\leqslant\\&C\omega_\phi(f,\frac{1}{n})_\infty.\end{aligned}$$

再由 Ba 空间范数的定义, 有

$$\begin{aligned}\|G_n^*(f-p_n,x)\|_{Ba,\phi}&=\inf\Big\{\alpha>0:\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m\|G_n^*(f-p_n,x)\|_{p_m,\phi}^m}{\alpha^m}\leqslant1\Big\}\leqslant\\&\inf\Big\{\alpha>0:\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{qC\omega_\phi(f,\frac{1}{n})_\infty}{\alpha}\Big)^m\leqslant1\Big\}.\end{aligned}$$

取 $\alpha=2qC\omega_\phi(f,\frac{1}{n})_\infty$, 则 $\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{qC\omega_\phi(f,\frac{1}{n})_\infty}{\alpha}\Big)^m=\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^m=1$. 从而

$$\|G_n^*(f-p_n,x)\|_{Ba,\phi}\leqslant C(q)\omega_\phi(f,\frac{1}{n})_\infty. \tag{3}$$

又由

$$\begin{aligned}\|p_n(x)-f(x)\|_{p_m,\phi}&=\Big(\int_{-1}^{1}|p_n(x)-f(x)|^{p_m}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\Big)^{\frac{1}{p_m}}\leqslant\\&C\|p_n(x)-f(x)\|_\infty\leqslant C\omega_\phi(f,\frac{1}{n})_\infty,\end{aligned}$$

类似得到(3) 式的过程, 可有

$$\|p_n(x)-f(x)\|_{Ba,\phi}\leqslant C(q)\omega_\phi(f,\frac{1}{n})_\infty. \tag{4}$$

以下考虑对 $G_n^*(p_n,x)-p_n(x)$ 进行估计. 设 $H_{n+2}(f,x)=\sum_{k=0}^{n+1}f(x_k)\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^{n}f'(x_k)\sigma_k(x)$ 为函数 $f\in C_{[-1,1]}$ 以 $\{x_k\}_{k=0}^{n+1}$ 为插值结点组的拟 Hermite 插值算子. 其中:

$$\varphi_0(x)=\frac{1+x}{2}\Big(\frac{U_n(x)}{U_n(1)}\Big)^2;\ \varphi_{n+1}(x)=\frac{1-x}{2}\Big(\frac{U_n(x)}{U_n(-1)}\Big)^2;$$

$$\varphi_k(x)=(1-x^2)(1-xx_k)\frac{U_n^2(x)}{(n+1)^2(x-x_k)^2}\qquad k=1,2,\cdots,n;$$

$$\sigma_k(x)=(1-x^2)(1-x_k^2)\frac{U_n^2(x)}{(n+1)^2(x-x_k)^2}\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

由拟 Hermite 插值多项式的唯一性, 知

$$G_n^*(p_n,x)-p_n(x)=\sum_{k=1}^{n}p_n(x_k)\frac{x_k}{1-x_k^2}\sigma_k(x)-\sum_{k=1}^{n}p_n'(x_k)\sigma_k(x):=J_1+J_2.$$

对于 J_1, 利用 $\|p_n\|_\infty\leqslant2\|f\|_\infty$ 以及引理 2, 得

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} p_n(x_k) \frac{x_k}{1-x_k^2} \sigma_k(x) \right\|_{p_m,\phi} = \left[\frac{1}{(n+1)^{2p_m}} \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=1}^{n} p_n(x_k) \frac{x_k(1-x_k^2)U_n^2(x)}{(x-x_k)^2} \right|^{p_m} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{p_m}} \leqslant$$

$$\left[\frac{C\|f\|_\infty^{p_m}}{(n+1)^{2p_m}} \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{1-x^2}U_n(x)}{x-x_k} \right|^{p_m} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{p_m}} \leqslant$$

$$\left[\frac{C\|f\|_\infty^{p_m}}{(n+1)^{2p_m}} \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=1}^{n} |L_k(x)| \right)^{p_m} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{p_m}} \leqslant$$

$$\frac{C\|f\|_\infty}{(n+1)^2} n^{\left(2-\frac{1}{p_m}\right)} \leqslant \frac{C\|f\|_\infty}{n^{\frac{1}{p_m}}} \leqslant \frac{C\|f\|_\infty}{n^{\frac{1}{p_0}}}.$$

同样类似得到(3)式的过程,可有

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} p_n(x_k) \frac{x_k}{1-x_k^2} \sigma_k(x) \right\|_{Ba,\phi} \leqslant \frac{C\|f\|_\infty}{n^{\frac{1}{p_0}}}. \tag{5}$$

对于 J_2,由文献[6]的证明知对任意的 m,有

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} p_n'(x_k) \sigma_k(x) \right\|_{p_m,\phi} \leqslant C\omega_\phi\left(f, \frac{1}{n}\right)_\infty.$$

再由类似得到(3)式的过程,可有

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} p_n'(x_k) \sigma_k(x) \right\|_{Ba,\phi} \leqslant C(q)\,\omega_\phi\left(f, \frac{1}{n}\right)_\infty.$$

从而由(2)至(6)式得

$$\|G_n^*(f,x) - f(x)\|_{Ba,\phi} \leqslant \|G_n^*(f-p_n,x)\|_{Ba,\phi} + \|G_n^*(p_n,x) - p_n(x)\|_{Ba,\phi} +$$

$$\|p_n(x) - f(x)\|_{Ba,\phi} \leqslant C(q)\left(\omega_\phi\left(f, \frac{1}{n}\right)_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{n^{\frac{1}{p_0}}}\right).$$

定理1得证.

参考文献:

[1] DING Xia-xi, LUO Pei-zhu. *Ba* Space and Some Estimates of Laplace Operator [J]. 系统科学与数学:英文版, 1981, 1(1): 9-23.

[2] GRÜNWALD G. On the Theory of Interpolation [J]. Acta. Math., 1943, 75: 219-245.

[3] 许贵桥,刘永平. 一种拟Grünwald插值算子的 L_2 收敛速度[J]. 工程数学学报, 2000, 17(2): 19-24.

[4] DITZIAN A, TOTIK V. Moduli of Smoothness [M]. Berlin: Spring-Verlag, 1987.

[5] 田贵辰,许贵桥,赵华杰. 一种拟Grünwald插值算子的 L_p 加权收敛速度[J]. 高等学校计算数学学报, 2006, 28(1): 60-66.

[6] VARMA A K, PRASAD J. An Analogue of a Problem of P. Erdös and E. Feldheim on Convergence of Interpolatory Process [J]. J. Approx. Theory, 1989, 56: 225-240.

Rate of Weighted $B_{a,\phi}$ Convergence of a Kind of Quasi-Grünwald Interpolatory Operators

XIA Ying, XU Gui-qiao

(College of Mathematics Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China)

Abstract: An estimate is obtained for weighted $B_{a,\phi}$ convergence rate of a kind of quasi-Grünwald interpolatory polynomials $G_n^*(f,x)$, which is based on the zero points of Chebyshev polynomials of the second kind.

Key words: Chebyshev polynomials; quasi-Grünwald interpolatory; convergence rate

(责任编辑 向阳洁)