文章编号:1007 - 2985(2010)06 - 0023 - 04

二维辐射热传导方程的渐近展开方法*

刘志清,聂存云,聂攀任
(湖南涉外经济学院计算机学部,湖南 长沙 410205)

摘　要:二维辐射热传导方程是具有多尺度、强间断等性质的方程,渐近展开方法是求解这类方程的一种有效的方法,其基本思想是将具有多尺度性质的椭圆型向量问题解耦为若干光滑系数(或单尺度性质)的椭圆型向量问题进行求解.针对二维辐射热传导方程的简化线性模型,设计并分析了基于渐近展开方法的线性有限元方法,并给出了相应的误差估计式.

关键词:二维辐射热传导方程;渐近展开方法;多尺度性质;单尺度性质
中图分类号:O242.2　　**文献标志码**:A

二维辐射热传导方程组是惯性约束聚变(ICF)数值模拟研究中的一个模型方程[1],其背景为辐射流体动力学方程组中的能量方程.由于具有多尺度、强间断、强非线性等性质,使得方程的离散化以及离散系统的快速算法设计存在许多困难[2-3],因此设计和分析求解二维辐射热传导方程的离散化方法和离散系统的快速算法,对提升整个系统的计算效率有重要的作用.渐近展开方法是一种求解多尺度 PDEs 模型问题的自然方法,它是将这种具有多尺度 PDEs 模型问题解耦成若干单尺度 PDEs 问题进行求解,然后对各个具有光滑系数 PDEs 问题利用经典有限元或有限体元等方法[4-5]进行求解,再将求出的这些解代入渐近展开式中,即可得原具有多尺度性质的 PDEs 模型问题的近似解.笔者将渐近展开方法应用于求解二维辐射热传导方程组中,首先介绍二维辐射热传导方程的简化线性模型,然后利用二阶渐近展开方法将方程组解耦为 5 个具有单尺度性质的椭圆向量方程,最后推出求解各解耦后椭圆向量方程的算法,并给出解耦过程的误差估计式.

1　模型问题

考虑如下二维辐射热传导方程的简化线性模型:

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(k(\boldsymbol{X})\nabla t_1)+(t_1-t_2)+(t_1-t_3)+c_0t_1=f_1 & \boldsymbol{X}\in\Omega,\\ -\nabla\cdot(k(\boldsymbol{X})\nabla t_2)+(t_2-t_1)+c_0t_2=f_2 & \boldsymbol{X}\in\Omega,\\ -\nabla\cdot(k(X)\nabla t_3)+(t_3-T_1)+c_0t_3=f_3 & \boldsymbol{X}\in\Omega,\\ t_{1n}=t_{2n}=0 & \boldsymbol{X}\in\partial\Omega,\\ t_{3n}=0 & \boldsymbol{X}\in\Gamma_2,\\ t_3=2.0 & \boldsymbol{X}\in\Gamma_1. \end{cases} \tag{1}$$

* **收稿日期**:2010 - 07 - 12
基金项目:湖南省教育厅科学研究项目(07C219)
作者简介:刘志清(1976 -),女,湖南长沙人,湖南涉外经济学院计算机学部讲师,硕士,主要从事多重网格法与区域分解法研究.

其中,求解区域 Ω 如图1所示.Γ 是开子区域 Ω^+ 和 Ω^- 的交界线,称 Ω 的间断线;$c_0 \geqslant 0$;$f_i(i=1,2,3)$ 是 Ω 上适当的光滑函数;跳系数

$$k(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} \alpha^+(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \in \Omega^+, \\ \varepsilon^{-1}\alpha^-(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \in \Omega^-, \end{cases} \tag{2}$$

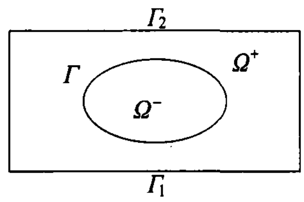

图1　求解区域 Ω

这里 $\alpha^+(\boldsymbol{X}),\alpha^-(\boldsymbol{X})$ 为光滑且有界的正函数;参变量 $\varepsilon > 0$.模型问题(1)的解函数 $t_i \in C(\Omega)$,流函数 $k\nabla t_i \in C(\Omega)$,即满足跳跃条件 $[t_i] = [kt_{in}] = 0(i=1,2,3)$.

2　渐近展开方法的基本思想

针对模型问题(1)在 $\varepsilon^{-1} \to \infty$ 条件下,将多尺度的二维辐射热传导方程组解耦成单尺度的,这里仅介绍二阶渐近展开方法的主要思想.

若记 $\boldsymbol{T} = (t_1,t_2,t_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{f} = (f_1,f_2,f_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b} = (0,0,2x_1)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2+c_0 & -1 & -1 \\ -1 & 1+c_0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+c_0 \end{pmatrix},\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & x_1 \end{pmatrix},\boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & x_2 \end{pmatrix},$$

其中 x_i 表示关于 Γ_i 的特征函数,即

$$x_i(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{X} \in \Gamma_i, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$$

则模型问题(1)对应的向量形式为

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k(\boldsymbol{X})\nabla \boldsymbol{T}) + \boldsymbol{BT} = \boldsymbol{f} & \boldsymbol{X} \in \Omega, \\ \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{T} + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{T}_n = b & \boldsymbol{X} \in \partial\Omega \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \end{cases} \tag{3}$$

以 $t_i(i=1,2,3)$ 二阶渐近展开为例,不妨设

$$t_i(X;\varepsilon) \approx \begin{cases} t_{i0}^+(\boldsymbol{X}) + \varepsilon t_{i1}^+(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \in \Omega^+, \\ t_{i0}^-(\boldsymbol{X}) + \varepsilon t_{i1}^-(\boldsymbol{X}) + \varepsilon^2 t_{i2}^-(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \in \Omega^-. \end{cases} \tag{4}$$

将(2),(4)式代入(3)式,再比较 ε^i 的系数,有

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha^+ \nabla \boldsymbol{T}_i^+) + \boldsymbol{BT}_i^+ = \begin{cases} \boldsymbol{f}^+ & i=0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} & \boldsymbol{X} \in \Omega^+, \\ -\nabla \cdot (\alpha^- \nabla \boldsymbol{T}_0^-) = 0 & \boldsymbol{X} \in \Omega^-, \\ -\nabla \cdot (\alpha^- \nabla \boldsymbol{T}_1^-) + \boldsymbol{BT}_0^- = \boldsymbol{f}^- & \boldsymbol{X} \in \Omega^-, \\ -\nabla \cdot (\alpha^- \nabla \boldsymbol{T}_2^-) + \boldsymbol{BT}_1^- = \boldsymbol{f}^- & \boldsymbol{X} \in \Omega^-, \\ \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{T}_i^+ + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{T}_{in}^+ = \begin{cases} \boldsymbol{b} & i=0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} & \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^+ \setminus \Gamma. \end{cases}$$

由跳跃条件 $[\boldsymbol{T}] = [k\boldsymbol{T}_n] = 0$ 知 $\boldsymbol{T}_i^+ = \boldsymbol{T}_i^-$,$\alpha^+\boldsymbol{T}_{in}^+ = \alpha^-\boldsymbol{T}_{i+1,n}^-$,$\boldsymbol{T}_{0,n}^- = 0$,其中 $i=0,1$;$\boldsymbol{X} \in \Gamma$,于是原模型问题(1)解耦成如下分别关于 $\boldsymbol{T}_0^-,\boldsymbol{T}_0^+,\boldsymbol{T}_1^-,\boldsymbol{T}_1^+,\boldsymbol{T}_2^-$ 的单尺度椭圆向量方程:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha^- \nabla \boldsymbol{T}_0^-) = 0 & \boldsymbol{X} \in \Omega^-, \\ \boldsymbol{T}_{0n}^- = 0 & \boldsymbol{X} \in \Gamma; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha^+ \nabla \boldsymbol{T}_0^+) + \boldsymbol{BT}_0^+ = \boldsymbol{f}^+ & \boldsymbol{X} \in \Omega^+; \\ \boldsymbol{T}_0^+ = \boldsymbol{T}_0^- & \boldsymbol{X} \in \Gamma, \\ \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{T}_0^+ + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{T}_{0n}^+ = \boldsymbol{b} & \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^+ \setminus \Gamma; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha^- \nabla \boldsymbol{T}_1^-) + \boldsymbol{BT}_0^- = \boldsymbol{f}^- & \boldsymbol{X} \in \Omega^-, \\ \alpha^-\boldsymbol{T}_{1n}^- = \alpha^+\boldsymbol{T}_{0n}^+ & \boldsymbol{X} \in \Gamma; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\alpha^+ \nabla \boldsymbol{T}_1^+) + \boldsymbol{BT}_1^+ = 0 & \boldsymbol{X} \in \Omega^+, \\ \boldsymbol{T}_1^+ = \boldsymbol{T}_1^- & \boldsymbol{X} \in \Gamma, \\ \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{T}_1^+ + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{T}_{1n}^+ = 0 & \boldsymbol{X} \in \partial\Omega^+ \setminus \Gamma; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(\alpha^-\nabla T_2^-)+BT_1^-=0 & X\in\Omega^-,\\ \alpha^- T_{2n}^-=\alpha^+ T_{1n}^+ & X\in\Gamma.\end{cases}\tag{9}$$

3　渐近展开方法的算法

将原模型问题(1)解耦成单尺度椭圆向量方程后，如何求解方程(5)至(9)是以下将讨论的主要内容.下面给出求解关于 T_0^-，T_0^+ 的单尺度椭圆向量方程的基本求解步骤及方法.关于 T_1^- 和 T_1^+ 的计算类似可得.

（ⅰ）由方程(5)易知，其解为常向量.

（ⅱ）利用线性微分方程的叠加原理，可将方程(6)分解为如下4个问题：

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(\alpha^+\nabla P_0)+BP_0=f^+ & X\in\Omega^+,\\ P_0=(0\quad 0\quad 0)^{\mathrm T} & X\in\Gamma,\\ C_1P_0+C_2P_{0n}=b & X\in\partial\Omega^+\backslash\Gamma;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(\alpha^+\nabla P_i)+BP_i=0 & X\in\Omega^+,\\ P_i=e_i & e_i\text{ 为单位向量},X\in\Gamma,\\ C_1P_i+C_2P_{in}=0 & i=1,2,3,X\in\partial\Omega^+\backslash\Gamma.\end{cases}$$

其中 $P_i=(P_{i1}+P_{i2}+P_{i3})^{\mathrm T}$，$i=0,1,2,3$.因此，方程(6)的解可表示为 $T_0^+=P_0+k_1P_1+k_2P_2+k_3P_3$（其中 k_1，k_2 和 k_3 为待定常数）.将 T_0^+ 代入(6)，结合方程(6)分解的4个问题可知 $T_0^-=(k_1,k_2,k_3)^{\mathrm T}$，即 $(k_1,k_2,k_3)^{\mathrm T}$ 为方程(5)的解.

（ⅲ）要得到方程(5)的解 T_0^- 和方程(6)的 T_0^+，就需要确定常数 k_1，k_2 和 k_3.为确定常数 k_1，k_2 和 k_3，将方程(7)第1个式子两端在 Ω^- 上进行积分，得 $-\int_{\Omega^-}\nabla\cdot(\alpha^-\nabla T_1^-)+\int_{\Omega^-}BT_0^-=\int_{\Omega^-}f^-$.由Green公式有 $-\int_{\partial\Omega^-}\alpha^-\nabla T_1^-+\int_{\Omega^-}BT_0^-=\int_{\Omega^-}f^-$，再利用方程(7)的第2个式子得 $-\int_{\Gamma}\alpha^+ T_{0n}^++\int_{\Omega^-}BT_0^-=\int_{\Omega^-}f^-$，即

$$-\int_{\Gamma}\alpha^+(P_0+k_1P_1+k_2P_2+k_3P_3)_n+\int_{\Omega^-}BT_0^-=\int_{\Omega^-}f^-.\tag{10}$$

将(10)式用分量形式表示，可推得

$$\begin{cases}k_1\left(\int_{\Omega^-}(2+c_0)-\int_{\Gamma}\alpha^+P_{11n}\right)-k_2\left(\int_{\Omega^-}+\int_{\Gamma}\alpha^+P_{21n}\right)-k_3\left(\int_{\Omega^-}+\int_{\Gamma}\alpha^+P_{31n}\right)=\int_{\Omega^-}f_1^-+\int_{\Gamma}\alpha^+P_{01n},\\ -k_1\left(\int_{\Omega^-}+\int_{\Gamma}\alpha^+P_{12n}\right)+k_2\left(\int_{\Omega^-}(1+c_0)-\int_{\Gamma}\alpha^+P_{22n}\right)-k_3\int_{\Gamma}\alpha^+P_{32n}=\int_{\Omega^-}f_2^-+\int_{\Gamma}\alpha^+P_{02n},\\ -k_1\left(\int_{\Omega^-}+\int_{\Gamma}\alpha^+P_{13n}\right)-k_2\int_{\Gamma}\alpha^+P_{23n}+k_3\left(\int_{\Omega^-}(1+c_0)-\int_{\Gamma}\alpha^+P_{33n}\right)=\int_{\Omega^-}f_3^-+\int_{\Gamma}\alpha^+P_{03n}.\end{cases}\tag{11}$$

可知(11)式可视为未知量为 k_1，k_2 和 k_3 的线性代数方程组，求该线性方程组即可得方程(5)的解 T_0^- 和方程(6)的 T_0^+.

4　误差

利用渐近展开方法，将模型问题(1)进行解耦，易知其近似解与原问题解函数有如下误差估计（在此不作证明）：

定理1　设 $T\in(H^1(\Omega)\cap C^2(\Omega))^3$，若记 T 为原模型问题(1)的精确解，$T_\varepsilon=(t_1(X;\varepsilon),t_2(X;\varepsilon),t_3(X;\varepsilon))^{\mathrm T}$ 为其二阶渐近展开解，则有 $T_\varepsilon=T+O(\varepsilon^2)$.

5　结语

将模型问题(1)解耦为5个具有单尺度性质的椭圆向量方程后，在求解单尺度椭圆向量方程的过程中，类似于椭圆标量形式，利用有限元方法，构造有限元向量空间，可求出各单尺度椭圆向量方程相应的有限元解向量，进而得到二维辐射热传导方程组基于渐近展开方法的有限元格式的数值解.若对求解每个单

尺度椭圆向量方程带来的扰动问题进行理论分析,也可得到类似于椭圆标量方程的误差结果,在此不再详细讨论.

参考文献:

[1] 王淦昌,袁之尚.惯性约束聚变[M].合肥:安徽教育出版社,1996.

[2] MO Ze-yao,FU Shang-wu,SHEN Long-jun. Parallet Lagrange Numerical Simulation for 2-Dimension Three Temperature Hydrodynamics [J]. Chinese J. Comput. Phys. ,2000,34(6):625 – 632.

[3] MO Ze-yao,SHEN Long-jun,GABRIEL WITTUM. Parallel Adaptive Multigrid Algorithm for 2-D 3-T Diffusion Equation [J]. Int. J. of Computer Math. ,2004,81(3):361 – 374.

[4] SHU Shi,YU Hai-yuan,HUANG Yun-qing,et al. A Preserving-Symmetry Finite Volume Scheme and Superconvergence on Quadrangle Grids [J]. Numerical Analysis and Modeling,2006,3(3):348 – 360.

[5] LIANG S,MA X,ZHOU A. A Symmetric Finite Volume Scheme for Selfadjoint Elliptic Problems [J]. J. Comp. Appl. Math. ,2002,147:121 – 136.

Asymptotic Expansion Methods for 2-D Radiation Heat Conduction Equations

LIU Zhi-qing,NIE Cun-yun,NIE Pan-ren

(Department of Computer Science,Hunan International Economics University,Changsha 410205,China)

Abstract:2-D radiation heat conduction equations have multi-scale characteristic and strong discontinuity. The asymptotic expansion method is effective to solve such problems,whose main idea is to decompose the elliptic vector equation with multi-scale characteristic into several elliptic vector equation with smooth (or single-scale characteristic) coefficients. For a kind of linear radiation heat conduction equations,this paper designs and analyzes a linear finite element method based on the asymptotic expansion,and gives corresponding error estimation.

Key words:2-D radiation heat conduction equations;asymptotic expansion method;multi-scale characteristic;single-scale characteristic

(责任编辑　向阳洁)