文章编号: 1007- 2985(2009) 01- 0020- 03

一类非线性动力系统的概周期解*

罗红英, 刘　俊, 吕　贤
(曲靖师范学院数学与信息科学学院, 云南 曲靖　655011)

摘　要: 运用 Leray-Schauder 不动点定理和 Liapunov 函数方法, 研究了| 类四阶非线性动力系统的概周期解, 得到了该动力系统存在概周期解的充分条件.

关键词: 概周期解; 动力系统; Liapunov 函数
中图分类号: O175.14　　文献标识码: A

文献[1] 研究了下面的三阶非线性系统概周期解的存在性: $x^{(4)} + ax + bx + x + h(x) = 0$. 笔者在此基础上, 研究下面的一类四阶非线性动力系统的概周期解:

$$x^{(4)} + P(t,x) + Q(t,x) + H(t,x) + \ (t,x) = f(t,x,x,x,x). \tag{1}$$

运用 Leray-Schauder 不动点定理和 Liapunov 函数方法, 得到了系统(1) 概周期解存在的充分条件.

1　预备知识

为叙述方便, 考虑系统:

$$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{F}(t,x). \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{F}(t,x)\quad C^1(\mathbf{R}\quad \mathbf{R}^n)\quad \mathbf{R}^n$.

引理 1[2]　如果存在一个 Liapunov 函数 $V(t,x)$ 在乘积空间 $:I(0\quad t<+\quad)\quad E_L(\quad x\quad L, L>0)$ 上连续可微 (L 可以足够大), 且满足:

$(\ )\ (\ x\ )\quad V(t,x)\quad (\ x\ ),\ (r),\ (r)$ 是连续的, $\lim\limits_{r\ +} (r) = +\ ;$

$(\ )\ \frac{dV}{dt}|_{(2)}\quad -[k- q_1(t)]V(t,x)+ q_2(t)\ \sqrt{V(t,x)}$.

其中 $k>0$ 是常数, $q_i(t)\quad 0(i=1,2)$ 是连续函数, 且满足

$$\lim_{(t,v)\ (\ ,\ )} \frac{1}{v}\int_t^{tv} q_1(s)ds < k, \sup_{t\ 0}\int_t^{t+1} q_2(s)ds < +\ .$$

那么, 方程(2) 的解是一致最终有界的.

引理 2(Leray-Schauder)[3]　设 $A:E\quad E$ 全连续, 如果 $\{x|x\quad E, x= \ Ax, 0<\ <1\}$ 是有界的, 那么 A 在 Banach 空间 E 中的闭球 T 中必有不动点, 这里 $T=\{x|x\quad E,\quad x\quad R\}$, $R=\sup\{\ x\ |x=\ Ax, 0<\ <1\}$.

2　主要结果

先对非线性项作特殊处理, 设

$$P(t,x) = ax + p(t,x),\ Q(t,x) = bx + q(t,x), H(t,x) = cx + h(t,x),\ \ (t,x) = dx + \ (t,x).$$

而 a, b, c, d 均为正常数, $p(t,x), q(t,x), h(t,x),\ (t,x)$ 和 $f(x,x,x,x)$ 均为各自变量的连续可微函数, 且是概周期函数. 于

* 收稿日期: 2008- 10- 16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10361007); 云南省自然科学基金资助项目(2006A0082M); 云南省教育厅科学研究基金(08Y0302)
作者简介: 罗红英(1982-), 男, 云南陆良人, 曲靖师范学院数学与信息科学学院助教, 主要从事微分方程、动力系统研究.

是, 可将系统(1) 化成如下等价方程组:

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 = x_4, \\ x_4 = -dx_1 - cx_2 - bx_3 - ax_4 - (t, x_1) - h(t, x_2) - q(t, x_3) - p(t, x_4) + f(t, x_1, x_2, x_3, x_4). \end{cases} \tag{3}$$

系统(3) 的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -d & -c & -b & -a \end{pmatrix}. \tag{4}$$

定理 1　设系统(3) 满足下列条件:

(　) 系数矩阵(4) 的广义特征方程的广义特征根 $_i(t)$ 均有负实部, 即 $\mathrm{Re}\ _1(t) \quad - \quad < 0 (i = 1, 2, 3, 4)$, 其中　是一个正常数;

(　) $\lim\limits_{+} \dfrac{|(t, x_1)|}{} = {}_1$, $\lim\limits_{+} \dfrac{|h(t, x_2)|}{} = {}_2$, $\lim\limits_{+} \dfrac{|q(t, x_3)|}{} = {}_3$, $\lim\limits_{+} \dfrac{|p(t, x_4)|}{} = {}_4$, $\lim\limits_{+} \dfrac{|f(t, x_1, x_2, x_3, x_4)|}{} = {}_5$, 其中 $= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$, $= \max\{ _1, _2, _3, _4, _5\}, 0 < \quad < \dfrac{^{10}}{2M^4}$.

则系统(3) 至少存在 1 个概周期解, 且导数也是概周期函数.

命题 1　在定理 1 的条件下, 存在正常数 $k_i = k_i(, M) (i = 1, 2)$ 和 $M = \max\{a, b, c, d, 1\}$, 使对所有 t, x_1, x_2, x_3, x_4, 有

$$k_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \quad V \quad k_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2).$$

证明　构造 Liapunov 函数如下:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4. \tag{5}$$

其中:

$$V_1 = \frac{1}{2c}(abc - c^2 - a^2d)(cx_1 + bx_2 + ax_3 + x_4)^2 + \frac{d}{2c}[(ab - c)x_2 + a^2x_3 + ax_4]^2 + \frac{d}{2a}[(ab - c)x_1 + a^2x_2 + ax_3]^2 + \frac{d}{2a}(abc - a^2d - c^2)x_1^2;$$

$$V_2 = \frac{ad}{2}(x_4 + ax_3 + \frac{ab - c}{a}x_2)^2 + \frac{cd}{2}(x_3 + ax_2 + \frac{ad}{c}x_1)^2 + \frac{d^2}{2c}(abc - c^2 - a^2d)x_1^2 + \frac{d}{2a}(abc - c^2 - a^2d)x_2^2;$$

$$V_3 = \frac{ad}{2}(dx_1 + cx_2 + \frac{c}{a}x_3)^2 + \frac{cd}{2}(x_4 + ax_3 + \frac{ad}{c}x_2)^2 + \frac{d^2}{2c}(abc - c^2 - a^2d)x_2^2 + \frac{d}{2a}(abc - c^2 - a^2d)x_3^2;$$

$$V_4 = \frac{cd}{2}(dx_1 + cx_2 + \frac{bc - ad}{c}x_3)^2 + \frac{ad}{2}(dx_2 + cx_3 + \frac{c}{a}x_4)^2 + \frac{d^2}{2c}(abc - c^2 - a^2d)x_3^2 + \frac{d}{2a}(abc - c^2 - a^2d)x_4^2.$$

系数矩阵(4) 的特征方程 $|\ \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$ 可化为 $^4 + a\ ^3 + b\ ^2 + c\ + d = 0$. 由条件(　) 知满足 Routh-Hurwitz 条件. 由根与系数之间的关系, 可推得:

$$a = -(_1 + _2 + _3 + _4) \quad 4\ ; b = {}_1{}_2 + {}_1{}_3 + {}_1{}_4 + {}_2{}_3 + {}_2{}_4 + {}_3{}_4 \quad 6\ ^2;$$
$$c = -({}_1{}_2{}_3 + {}_1{}_2{}_4 + {}_1{}_3{}_4 + {}_2{}_3{}_4) \quad 4\ ^3; d = {}_1{}_2{}_3{}_4 \quad ^4;$$
$$ab - c \quad 20\ ^3; abc - c^2 - a^2b \quad 64\ ^6.$$

显然, 有

$$V \quad V_2 + V_4 \quad d(abc - c^2 - a^2d)[\frac{d}{2c}(x_1^2 + x_3^2) + \frac{1}{2a}(x_2^2 + x_4^2)] \quad ^4 \quad 64\ ^6[\frac{^4}{2M}(x_1^2 + x_3^2) + \frac{1}{2M}(x_2^2 + x_4^2)] \quad \frac{32B\ ^{10}}{M}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2),$$

其中 $B = \min(^4, 1)$. 故 V 是正定函数. 类似地, 经过大量计算, 容易估计出 $V \quad 17M^4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$, 即 V 有无穷小上界.

命题 2　在定理 1 的条件下, 存在正常数 $k_3 = k_3( )$, 使当 (x_1, x_2, x_3, x_4) 是方程组(3) 的任一解时, 有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(3)} \quad -k_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2).$$

证明　沿着系统(3) 的轨线, 对 V 求全导数, 得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(3)} = \frac{V}{t} + \frac{V}{x_1}x_2 + \frac{V}{x_2}x_3 + \frac{V}{x_3}x_4 + \frac{V}{x_4}[-dx_1 - cx_2 - bx_3 - ax_4 - (t, x_1) - h(t, x_2) - q(t, x_3) - p(t, x_4) + f(t, x_1, x_2, x_3, x_4)] - q(t, x_3) - p(t, x_4) + f(t, x_1, x_2, x_3, x_4)]. \tag{6}$$

由(5) 式可得 $\left| \frac{V}{x_4} \right| \quad 14M^4 \quad \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$.

由条件( ), 对任意给定的 $_0(0< \quad _0< \frac{2^{10}}{5M^4})$, 存在充分大的 $R>0$, 使得 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \quad R^2$, 有

$$| \ (t,x_1)| \quad (\ +\ _0),\ |h(t,x_2)| \quad (\ +\ _0),\ |q(t,x_3)| \quad (\ +\ _0),$$
$$|p(t,x_4)| \quad (\ +\ _0),\ |f(t,x_1,x_2,x_3,x_4)| \quad (\ +\ _0).$$

由(6) 式, 在乘积空间 $^*: I(0 \quad t<+ \quad) \quad \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \quad R^2\}$, 有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(3)} \quad [-64^{\ 10}+70M^4(\ +\ _0)](x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)=-[\ ^{10}+(35^{\ 10}-70M^4\ )+$$
$$(28^{\ 10}-70M^4\ _0)](x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2) \quad - \quad ^{10}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2).$$

定理 1 的证明　为了应用 Leray-Schauder 不动点定理, 考虑下面的带参方程:

$$\boldsymbol{X}= \ \boldsymbol{AX}+ \ \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{X}). \tag{7}$$

其中: $\boldsymbol{A}$ 是(4) 式; 为满足 $0< \quad 1$ 的参数; $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{X})=(0,0,0,- \ (t,x_1)-h(t,x_2)-q(t,x_3)-p(t,x_4)+f(t,x_1,x_2,x_3,x_4))^{\mathrm{T}}$.

显然, 当参数 $=1$ 时, 系统(7) 就变成了系统(3).

设 S 表示所有四维向量概周期连续函数 $\boldsymbol{X}(t)$ 构成的 Banach 空间, 其范数为

$$\boldsymbol{X} \quad = \sup_t\{|x_1(t)|+|x_2(t)|+|x_3(t)|+|x_4(t)|\}.$$

由条件( ), 存在正常数 c_1, c_2, 使得

$$\mathrm{e}^{At} \qquad c_2\mathrm{e}^{-c_1t} \qquad t \quad 0. \tag{8}$$

因此, 当 $\boldsymbol{X}(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t))$ 有界时, $\int_{-}^{t}\mathrm{e}^{A(t-\ )}\boldsymbol{F}(\ ,\boldsymbol{X}(\ ))\mathrm{d}\ $ 存在且关于 t 可微.

定义算子 $T: S \quad S$, $T\boldsymbol{X}=\int_{-}^{t}\mathrm{e}^{A(t-\ )}\boldsymbol{F}(\ ,\boldsymbol{X}(\ ))\mathrm{d}\ $. 考虑算子方程 $\boldsymbol{X}= \ T\boldsymbol{X}$. 由 , h, p, q, f 的连续可微性及概周期性知 T 为连续算子. 设 $\{\boldsymbol{X}_n\}$ 为一无穷序列, 满足 $\boldsymbol{X}_n \quad k<+ \quad (n=1,2, \ )$. 由 T 的定义和(8) 式可知序列 $\{T\boldsymbol{X}_n\}$ 是一致有界的, 直接微分得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T\boldsymbol{X}_n= \ \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{X}_n(t))+ \ \boldsymbol{A}T(\boldsymbol{X}_n) \quad n=1,2, \ $.

因此, 由 $\{\boldsymbol{X}_n\}$ 一致有界性, 必然蕴含 $\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T\boldsymbol{X}_n\}$ 的一致有界性; 反过来, 又蕴含 $\{T\boldsymbol{X}_n\}$ 的等度连续性. 故 T 为紧算子, 从而 T 为全连续算子.

由命题 1 和命题 2, 可知由(5) 式定义的 Liapunov 函数 V 满足引理 1 的条件, 系统(3) 的解是一致最终有界的. 利用概周期函数的性质, 可知系统(3) 的任意解有界, 从而集合 $\{\boldsymbol{X}(t)\mid \boldsymbol{X}(t) \quad S, \boldsymbol{X}= \ T\boldsymbol{X}, 0< \quad 1\}$ 在 S 中为有界集. 根据引理 2, T 在 S 中有不动点, 因此, 系统(3) 至少存在 1 个概周期解, 且导数也是概周期函数.

参考文献:

[1] LIANG Zai-zhong. A Study of the Construction of Liapunov Function for a Class of Fourth Order Nonlinear Systems [J]. Appl. Math. and Mech. (English Ed.), 1995, 16(2): 195- 202.

[2] HARA T. On the Uniform Ultimate Boundedness of the Solutions of Certain Third Order Differential Equations [J]. J. Math. Anal. Appl., 1981, 80(5): 533- 544.

[3] GUO Da-jun. Nonlinear Functional Analysis [M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 1985: 159- 162.

Almost Periodic Solutions for a Class of Nonlinear Dynamical Systems

LUO Hong-ying, LIU Jun, L Xian

(School of Mathematics and Information Science, Qujing Normal College, Qujing 655011, Yunnan China)

Abstract: In this paper, the almost periodic solutions for a class of four order nonlinear dynamical systems are studied by using the Leray-Schauder fixed point theorem and the method of Liapunov function. The sufficient conditions which guarantee the existence of the almost periodic solutions are obtained.

Key words: almost periodic solution; dynamical system; Liapunov function

(责任编辑　向阳洁)