文章编号: 1007-2985(2009)02-0016-03

整函数与其导函数分担值集的唯一性*

丁杰, 柏玲玲, 袁文俊
(广州大学数学与信息科学学院, 广东 广州 510006)

摘 要: 运用正规族理论研究了整函数与其导函数分担值集的唯一性问题. 当分担值集的元素个数为 $n+1(n\geq 2)$ 个时, 得到整函数和它导函数的各种具体关系.

关键词: 正规族; 整函数; 球面导数
中图分类号: O175.4　　文献标识码: A

1 主要结果

在文中使用 Nevanlinna 理论[1] 和正规族理论的标准记号[2]. 记 $E(S,f)=\bigcup_{a\in S}\{z: f(z)-a=0\}$, 若 $E(S,f)=E(S,g)$, 则函数 f, g 分担集合 S; 若 $S=\{a\}$, 则称为 f, g CM 分担值 a; 若 $f(z)-a$ 的零点不计重数, 则称为 IM 分担.

定理 1　设 $S=\{0, a_1, a_2, \cdots, a_n\}(n\geq 2)$, 是有限多个判别的复数集合, 若 f 和 f' 是 2 个非常数整函数且 $E(S,f)=E(S,f')$, 则有以下 3 种关系: (1) $f\equiv f'$; (2) $f'\equiv -f$; (3) $f'=-\dfrac{a_i}{a_j}f\ (i\neq j)$.

定理 1 中 S 包含 0 元素, 不含 0 元素的情况有兴趣的读者不妨具体讨论.

在 1976 年, F. Gross[3] 就提出能否找到一个有限集合 S, 对任意 2 个非常数整函数 f 和 g, 当 S 为 f 和 g 的分担值集时, 必有 $f\equiv g$. 1995 年, 仪洪勋[4] 证明了有限集合 S 是存在的, 并且说明集合 S 含有 7 个元素.

如果考虑 2 个特殊的整函数 f 和 f', 对集合 S 中元素个数的条件就会减弱.

命题 1[5]　存在一个含有 3 个元素的复数集合 $S=\{0, a, b\}$, 若 f 和 f' 是 2 个非常数整函数且 $E(S,f)=E(S,f')$, 则 $f\equiv f'$.

注记　命题 1 中 $S=\{0, a, b\}$, 即集合 S 包含 0 元素. 对集合 S 不含 0 元素的情况, 常建明[6] 在 2007 年给出了证明.

对分担值的唯一性问题, 同样有许多结论. 1977 年, Rubel-Yang[7] 证明了: f 为非常数整函数, a, b 为 2 个判别的有穷复数, 若 a, b 为 f 和 f' 的 CM 分担值, 则 $f\equiv f'$. 条件 f 和 f' CM 分担 a, b 值到 f 和 f' IM 分担 a, b 值的改进, 是由 1979 年 Mues-Steinmetz[8] 给出的. 1990 年, 杨连忠[9] 进一步推广得到, 若 a, b 为 f 和 $f^{(k)}$ 的 CM 分担值, 则 $f\equiv f^{(k)}$, 其中 k 为正整数.

2 主要的引理

引理 1[2]　设 $f(z)$ 是整函数, 若 $f(z)$ 的球面导数有界, 则 $f^{\#}(z)$ 的级至多为 1. 其中, 球面导数 $f^{\#}(z)=|f'(z)|/(1+|f^2(z)|)$.

引理 2[1]　设 $\mathscr{F}$ 为域 D 内的全纯函数族, $\mathscr{F}$ 在 D 内正规的充分必要条件是对 D 的任意有界闭子域 D_1,

* 收稿日期: 2008-10-19
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771220); 广州市教育局科技计划项目(62035)
作者简介: 丁杰(1984-), 男, 山西新绛人, 硕士研究生, 主要从事复分析理论与应用研究.

存在相应的正数 M, 使得 $| f\ \ (z) |\quad M(1+ | f^{2}(z) |)$.

引理 3[2]　设 $\mathscr{F}$ 为 D 内的一列全纯函数族, k 为一正整数. 设 a, b, c 是 3 个判别的有限复数, 且 M 为正数. 若对任意 $f\quad \mathscr{F}$, 当 $f(z) = a, b, c$ 时, 有 $| f\ \ (z) |\quad M$, 则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

引理 4[5]　设 $\mathscr{F}$ 为 D 内的一列全纯函数族, k 为一大于等于 2 的正整数. 设 a, b, c 是 3 个判别的有限复数且 $b\quad 0$. 若对任意 $f\quad \mathscr{F}$, $E(0, f) = E(a, f\ \ )$, 且当 $f\ \ = b$ 时, 有 $f^{k}(z) = c$, 则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

3　定理 1 的证明

令 $S = \{0, a_1, a_2, \quad , a_n\}$ 是有限多个不同元素的复数集合, 设非常数的整函数满足 $E(S, f) = E(S, f\ \ )$, 令

$$(z) = \frac{f\ \ (z)[f\ \ (z) - a_1]\quad [f\ \ (z) - a_n]}{f(z)[f(z) - a_1]\quad [f(z) - a_n]},$$

则由 $E(S, f) = E(S, f\ \ )$, 可得

$$(z) = \frac{f\ \ (z)[f\ \ (z) - a_1]\quad [f\ \ (z) - a_n]}{f(z)[f(z) - a_1]\quad [f(z) - a_n]} = e^{h(z)}, \tag{1}$$

其中 h 为整函数.

由对数导数引理计算可得 $m(r, \ \ ) = S(r, f)$, 于是即得

$$T(r, \ \ ) = S(r, f). \tag{2}$$

下面来证明 f 的级小于等于 1.

令 $\mathscr{F} = \{f(z + \ \ ): \quad C\}, z\quad D = \{z: | z | < 1\}$, 则 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的一族全纯函数. 取 $0, a_1, a_2, \quad , a_n$ 中任意 3 个元素, 运用引理 3, $\mathscr{F}$ 在 D 内正规. 所以, 由 Marty 定则可得函数 f 的对数导数有界, 再由引理 1 得到 f 的级小于等于 1.

因此, $T(r, f) = O(r)$, 而 $S(r, f) = O(\log r)$. 于是由 (2) 式可知, 　是一个多项式. 再由 (1) 式得, 　一定是一个非 0 常数, 记为 A, 即 $\frac{f\ \ (z)[f\ \ (z) - a_1]\quad [f\ \ (z) - a_n]}{f(z)[f(z) - a_1]\quad [f(z) - a_n]} = A$. 简化可得

$$f\ \ (z)[f\ \ (z) - a_1]\quad [f\ \ (z) - a_n] = Af(z)[f(z) - a_1]\quad [f(z) - a_n]. \tag{3}$$

对 (3) 式两边求导, 得

$$f\ \ \{(n+1)[f\ \ ]^{n} - n(a_1 + a_2 + \quad + a_n)[f\ \ ]^{n-1} + \quad a_1 a_2 \quad a_n\} = Af\ \ \{(n+1)[f]^{n} - n(a_1 + a_2 + \quad + a_n)[f]^{n-1} + \quad a_1 a_2 \quad a_n\}. \tag{4}$$

首先断言 $f\quad 0$. 反之, 则存在一点 z_0 使得 $f\ \ (z_0) = 0$, f 在 z_0 点附近的泰勒展式为 $f(z) = f(z_0) + A_n(z - z_0)^{n} + \quad$, 其中 $A_n\quad 0, n\quad 2$. z_0 是 (4) 式左边的 $n - 2$ 重零点, 右边的 $n - 1$ 重零点. 矛盾.

于是有 $f\ \ (z) = BCe^{Cz}$, 则 $f(z) = D_1 + Be^{Cz}$, 其中 $B\quad 0, C\quad 0, D_1$ 是常数.

其次来证明 $D_1\quad S$.

若不然, 有 $f(z) = b + BCe^{Cz}$, $f\ \ (z) = BCe^{Cz}$, $b\quad 0, a_1, \quad , a_n$. 由 Picard 定理可知:

(　) 存在 z_0 使得 $f(z_0) = 0$, 则 $f\ \ (z_0) = a_i (i = 1, 2, \quad , n)$. 不妨设 $f\ \ (z_0) = a_1$, 则 $b = -\frac{a_1}{C}$.

(　) 同理存在 z_1 使得 $f(z_1) = a_1$, 则 $f\ \ (z_1) = a_i (i = 1, 2, \quad , n)$. 而 $f\ \ (z_1)\quad a_1$, 否则由 $b = a_1 - \frac{a_1}{C}$ 与 (　) 可得 $a_1 = 0$, 矛盾. 不妨设 $f\ \ (z_1) = a_2$, 则 $b = a_1 - \frac{a_2}{C}$.

(n) 存在 z_{n-1} 使得 $f(z_{n-1}) = a_{n-1}$, 则 $f\ \ (z_{n-1}) = a_i (i = 1, 2, \quad , n)$. 由同样的讨论有 $f\ \ (z_{n-1}) = a_n$, 则 $b = a_{n-1} - \frac{a_n}{C}$. 存在 z_n 使得 $f(z_{n-1}) = a_n$, 则有 $b = a_n - \frac{a_i}{C} (i = 1, 2, \quad , n)$, 分别与前 n 种情况矛盾. 所以, $D_1\quad S$.

下面分情况讨论 f 和 f 　的关系.

情况 1　$D_1 = 0$ 时, 有

$$f(z)=Be^{Cz},f'(z)=BCe^{Cz}.\tag{5}$$

由 f 为非常数整函数可知,存在 z_1 使得 $f(z_1)=a_1$,因此 $f'(z_1)=a_i(i=1,2,\cdots,n)$.若 $f'(z_1)=a_1$,由 (5) 式可得 $C=1$,同样存在 z_i 有 $f(z_i)=a_i,f'(z_i)=a_i(i=1,2,\cdots,n)$,计算均得到 $C=1$.所以可以得到函数与其导函数的一个关系:$f'\equiv f$.

除上面 $f'(z_1)=a_1$ 外讨论更一般的情况.不妨假设 $f'(z_1)=a_2$,有 $C=\dfrac{a_2}{a_1}$.同样运用 Picard 定理有 z_2 使得 $f(z_2)=a_2$,因此 $f'(z_1)=a_i(i=1,2,\cdots,n)$.当 $f'(z_2)=a_1$ 时,$C=\dfrac{a_1}{a_2}$.存在 z_3 使得 $f(z_3)=a_3$,因此 $f'(z_3)=a_i(i=1,2,\cdots,n)$.假设 $f'(z_3)=a_4$,得 $C=\dfrac{a_4}{a_3}$.

同理分别存在 z_{n-1} 和 z_n,使得:

$$f(z_{n-1})=a_{n-1},f'(z_{n-1})=a_n,C=\frac{a_n}{a_{n-1}};f(z_n)=a_n,f'(z_n)=a_{n-1},C=\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

所以有另一种情况:$C=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_3}{a_4}=\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$.这种情况下 $f'\equiv -f$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成对以相反数形式出现,不难看出要求 n 为偶数.

情况 2 $D_1=a_i$ 时(不妨令 $i=1$),有

$$f(z)=a_1+Be^{Cz},f'(z)=BCe^{Cz}.$$

存在 z_1 使得 $f(z_1)=0,f'(z_1)=a_i$.不妨设 $a_i=a_2$(a_1 为它的特殊情况),则

$$C=-\frac{a_2}{a_1}.\tag{6}$$

同理存在 z_2 使得 $f(z_2)=a_2$,则 $f'(z_2)=a_i(i=1,2,\cdots,n)$.当 $f'(z_2)=a_2$ 时,$C=\dfrac{a_2}{a_2-a_1}$,与(6) 式矛盾,$f'(z_2)$ 取其他均能相容,不妨取 $f'(z_2)=a_3$,

$$C=\frac{a_3}{a_2-a_1}.\tag{7}$$

同样有 z_3 使得 $f(z_3)=a_3$,取 $f'(z_3)=a_4$(取 a_1,a_2,a_3 与(6),(7) 式时矛盾),得

$$C=\frac{a_4}{a_3-a_1}.$$

依次这样讨论考虑,存在 z_{n-1} 使得 $f(z_{n-1})=a_{n-1}$,取 $f'(z_{n-1})=a_n$ 有 $C=\dfrac{a_n}{a_{n-1}-a_1}$.存在 z_n 使得 $f(z_n)=a_n,f'(z_n)$ 只能取 a_1(其他情况均能得到矛盾) 有 $C=\dfrac{a_1}{a_n-a_1}$.这样得到 $C=-\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2-a_1}=\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}-a_1}=\dfrac{a_1}{a_n-a_1}$,$f'=-\dfrac{a_2}{a_1}f$.所以 $f'=-\dfrac{a_i}{a_j}f\ (i\neq j)$.证毕.

志谢 感谢华南农业大学方明亮教授和杨德贵教授在讨论班上的细心指导并提供宝贵资料.

参考文献:

[1] FANG Ming-liang, LAWENCE ZALCMAN. Normal Families and Uniqueness Theorems for Entire Functions [J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, 280: 273-283.

[2] GROSS F. Factorization of Meromorphic Functions and Some Open Problems [J]. Complex Analysis Lecture Notes in Math., 1977, 599: 51-67.

[3] WANG Jian-ping, YI Hong-xun. Entire Functions That Share One Value CM with Their Dirivatives [J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, 277: 155-163.

[4] CHANG Jian-ming. Normal Families and Uniqueness of Entire Functions and Their Derivatives [J]. Acta. Mathematica Sinica(English Series), 2007, 23(6): 973-982.

(下转第 21 页)

参考文献:

[1] C RDOBA A, FEFFERMAN C. A Weighted Norm Inequality for Singular Integral [J]. Studia Math., 1976, 57: 97 - 101.

[2] WILSON J M. Weighted Norm Inequalities for the Continuous Square Functions [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1989, 314: 661- 692.

[3] P REZ C. Weighted Norm Inequalities for Singular Integral Operators [J]. J. London Math. Soc., 1994, 2: 296- 308.

[4] STEIN E M. Singular Integral and Differentiability Properties of Functions [M]. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970: 48- 49.

[5] P REZ C. On Sufficient Conditions for the Boundedness of the Hardy-Litlewood Maximal Operators Between Weighted L^p Space with Different Weights [J]. Proc. London Math. Soc., 1995, 71: 163- 185.

Weighted Inequalities for Singular Integral Operators with Dini-Type Condition

FENG Wen-li, ZHAO Jian-hua
(Department of Mathematics and Information Science, Shijiazhuang University, Shijiazhuang 050035, China)

Abstract: Now the study of singular integral operator with standard kernel is very popular. In order to enlarge the research scope, the authors decline the condition of kernel to Dini-type condition; and by using the quality of kernel and technique estimation, the authors obtain some weighted norm inequalities for the singular integral operator with Dini-type condition.

Key words: singular integral operator; Dini-type condition; weighted norm inequality

(责任编辑 向阳洁)

(上接第 18 页)

[5] CHANG Jian-ming, LAWRENCE ZALCMAN. Meromorphic Functions That Share a Set with Their Dirivatives [J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 338(2): 1 020- 1 028.

[6] CHANG Jian-ming, FANG Ming-liang, LAWRENCE ZALCMAN. Entire Functions That Share a Set with Their Dirivatives [J]. Archiv. Math., 2007, 89: 561- 569.

[7] RUBEL L, YANG C C. Values Shared by an Entire Function and Its Derivative [J]. Lecture Notes in Math., 1997, 599: 101- 103.

[8] YI Hong-xun. A Question of Gross and the Uniqueness of Entire Functions [J]. Nagoya. Math. J., 1995, 138: 169 - 177.

[9] 顾永兴, 庞学城, 方明亮. 正规族理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

Uniqueness of Entire Function Sharing a Set with Its Dirivative

DING Jie, BAI Ling-ling, YUAN Wen-jun
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: This paper studies the uniqueness problem of entire function sharing a set with its dirivative by using the thoery of normal families. When the number of elements in the set is $n+1$ $(n \geq 2)$, various relations of the fuction and its dirivative are obtained.

Key words: normal familty; entire function; spherical derivative

(责任编辑 向阳洁)