第 30 卷　第 3 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 30　No. 3
2009 年 5 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　May 2009

文章编号: 1007-2985(2009)03-0024-04

时间尺度上一类二阶时滞动力方程的振动性*

李同兴[1], 韩振来[1,2], 孙书荣[1]
(1. 济南大学理学院, 山东 济南　250022; 2. 山东大学控制科学与工程学院, 山东 济南　250061)

摘　要: 借助 Riccati 变换和时间尺度的有关理论, 研究了一类二阶非线性时滞动力方程解的振动性, 给出了该类方程振动的几个定理.

关键词: 时间尺度; 时滞动力方程; 振动性
中图分类号: O175.7　　文献标识码: A

时间尺度上时滞动力方程振动性研究近年来得到广泛关注[1-9]. 笔者研究形式时间尺度上二阶非线性时滞动力方程

$$(p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma})^{\Delta}+q(t)f(x(\tau(t)))=0\qquad t\in T\tag{1}$$

的振动性.

文献[1]研究了时间尺度上二阶线性时滞动力方程

$$x^{\Delta\Delta}(t)+p(t)x(\tau(t))=0\qquad t\in T\tag{2}$$

的振动性, 建立了方程(2)振动的几个充分条件, 统一了时滞微分方程和时滞差分方程振动性的相应结果. 文献[4]研究了时间尺度上二阶非线性中立型时滞动力方程

$$(r(t)([y(t)+p(t)y(t-\tau)]^{\Delta})^{\gamma})^{\Delta}+f(t,y(t-\delta))=0\qquad t\in T\tag{3}$$

的振动性, 得到方程(3)振动的一些充分条件. 文献[5-6]研究了时间尺度上二阶半线性动力方程

$$(r(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma})^{\Delta}+p(t)x^{\gamma}(t)=0\qquad t\in T\tag{4}$$

的振动性, 得到方程(4)振动的一些充分条件. 文献[2-3]研究了方程(1)当 $\gamma\geqslant 1$ 时的一些振动定理, 推广并改进了文献中的有关结果. 显然方程(2), (4)是方程(1)的特殊情况.

方程(1)的解 $x(t)$ 称为振动的, 如果 $x(t)$ 既不最终为正, 也不最终为负; 否则称为非振动的. 方程(1)称为振动的, 如果它的所有解都是振动的.

由于文中研究的是方程解的振动性, 可以假设 T 是无界的, 定义时间尺度区间 $[t_0,\infty)_T:=[t_0,\infty)\cap T$, $t>0$. 这里: $p(t)$ 和 $q(t)$ 是定义在时间尺度区间 $[t_0,\infty)_T$ 上的正的实数值 rd 连续函数; $\tau(t)$ 是定义在 T 到 T 上的滞量函数, 且 $\tau(t)\leqslant t$, $\lim_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$. 存在正常数 L, 使得 $\frac{f(x)}{x^{\gamma}}\geqslant L$, $x\neq 0$, γ 是 2 个正奇数之比. 此外假设 $\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{1}{p(t)}\right)^{1/\gamma}\Delta t=\infty$.

1　基本引理

方便起见记 $d_+(t):=\max\{0,d(t)\}$, $d_-(t):=\max\{0,-d(t)\}$.

* 收稿日期: 2009-03-02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60774004); 山东省自然科学基金项目(Y2008A28); 济南大学博士基金(XBS0843)
作者简介: 李同兴(1985-), 男, 山东临沂人, 硕士研究生, 主要从事微分方程及其应用研究
通讯作者: 韩振来(1962-), 男, 山东济南人, 教授, 博士, 主要从事微分方程及应用研究, E-mail: hanzhenlain@163.com.

引理 1(Keller 链锁法则[6])　当 $x(t)$ Δ 可导时, 有

$$((x(t))^{\gamma})^{\Delta} = \gamma\int_0^1 [hx^{\sigma} + (1-h)x]^{\gamma-1} x^{\Delta}(t)\,\mathrm{d}h. \tag{5}$$

引理 2[4]　设 $f(x) = -Ax^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + Bx, A > 0$, 则 $f(x)$ 在 $x_0 = \left(\frac{\gamma B}{(\gamma+1)A}\right)^{\gamma}$ 处取得最大值, 最大值为 $f(x_0) = \frac{\gamma^{\gamma}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{B^{\gamma+1}}{A^{\gamma}}$.

引理 3[2]　假设 $p \in C^1_{\mathrm{rd}}([t_0, \infty)_T, \mathbf{R})$, $p^{\Delta}(t) \geqslant 0$, 且

$$\int_{t_0}^{\infty} (\tau(t))^{\gamma} q(t)\,\Delta t = \infty. \tag{6}$$

若方程(1) 有一个最终正解 $x(t)$, 则存在 $t_* \geqslant t_0 > 0$, 当 $t \geqslant t_*$ 时有: (ⅰ) $x^{\Delta}(t) > 0, x(t) > tx^{\Delta}(t)$; (ⅱ) $x(t)$ 严格递增, $\frac{x(t)}{t}$ 严格递减.

2　主要结果

定理 1　假设(6) 式成立. $p \in C^1_{\mathrm{rd}}([t_0, \infty)_T, \mathbf{R})$, $p^{\Delta} \geqslant 0$, 且存在正值 Δ 可导函数 $r(t)$, $\delta(t)$, 使得

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left(Lr(s)\delta(s)q(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^{\gamma} - \frac{\gamma^{\gamma}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{C^{\gamma+1}}{D^{\gamma}}\right)\Delta s = \infty, \tag{7}$$

这里 $C = \frac{r(s)(\delta^{\Delta}(s))_+}{\delta(\sigma(s))} + (r^{\Delta}(s))_+$, $D = \frac{\gamma r(s)\delta(s)}{(p(s))^{1/\gamma}(\delta(\sigma(s)))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}$, 则方程(1) 在 $[t_0, \infty)_T$ 振动.

证明　假设方程(1) 在 $[t_0, \infty)_T$ 上有非振动解 $x(t)$. 不失一般性, 不妨设 $x(t) > 0, x(\tau(t)) > 0$, $t \geqslant t_* \geqslant t_0$. 定义

$$w(t) = \frac{\delta(t)p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma}}{x^{\gamma}(t)}\qquad t \geqslant t_* \geqslant t_0, \tag{8}$$

则 $w(t) > 0$, 由求导法则有

$$w^{\Delta}(t) = \frac{\delta(t)}{x^{\gamma}(t)}(p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma})^{\Delta} + p(\sigma(t))(x^{\Delta}(\sigma(t)))^{\gamma}\frac{x^{\gamma}(t)\delta^{\Delta}(t) - \delta(t)(x^{\gamma}(t))^{\Delta}}{x^{\gamma}(t)x^{\gamma}(\sigma(t))}.$$

由方程(1) 及引理 3 得

$$w^{\Delta}(t) \leqslant L\delta(t)q(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma} + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(\sigma(t))}w(\sigma(t)) - \frac{\delta(t)p(\sigma(t))(x^{\Delta}(\sigma(t)))^{\gamma}(x^{\gamma}(t))^{\Delta}}{x^{\gamma}(t)x^{\gamma}(\sigma(t))}.$$

当 $0 < \gamma \leqslant 1$ 时, 由引理 1 有 $((x(t))^{\gamma})^{\Delta} \geqslant \gamma(x^{\sigma}(t))^{\gamma-1}x^{\Delta}(t)$, 所以有

$$w^{\Delta}(t) \leqslant L\delta(t)q(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma} + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(\sigma(t))}w(\sigma(t)) - \gamma\frac{\delta(t)p(\sigma(t))(x^{\Delta}(\sigma(t)))^{\gamma}x^{\Delta}(t)}{x^{\gamma}(t)x(\sigma(t))}.$$

进而

$$w^{\Delta}(t) \leqslant -L\delta(t)q(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma} + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(\sigma(t))}w(\sigma(t)) - \gamma\delta(t)p(\sigma(t))\left(\frac{x^{\Delta\sigma(t)}}{x^{\sigma}(t)}\right)^{\gamma+1}\frac{x^{\Delta}(t)}{x^{\Delta\sigma}(t)}\frac{(x^{\sigma}(t))^{\gamma}}{x^{\gamma}(t)} \leqslant$$
$$-L\delta(t)q(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma} + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(\sigma(t))}w(\sigma(t)) - \gamma\delta(t)p(\sigma(t))\left(\frac{x^{\Delta\sigma}(t)}{x^{\sigma}(t)}\right)^{\gamma+1}\left(\frac{p(\sigma(t))}{p(t)}\right)^{1/\gamma}.$$

当 $\gamma > 1$ 时, $((x(t))^{\gamma})^{\Delta} \geqslant \gamma(x(t))^{\gamma-1}x^{\Delta}(t)$, 所以类似上面的证明, 有

$$w^{\Delta}(t) \leqslant L\delta(t)q(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma} + \frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(\sigma(t))}w(\sigma(t)) - \frac{\gamma\delta(t)p(\sigma(t))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(x^{\Delta}(\sigma(t)))^{\gamma+1}}{(p(t))^{1/\gamma}x^{\gamma+1}(\sigma(t))}.$$

从而当 $\gamma > 0$ 时, 由(8) 式得

$$w^{\Delta}(t) \leqslant L\delta(t)q(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma} + \frac{(\delta^{\Delta}(t))_+}{\delta(\sigma(t))}w(\sigma(t)) - \frac{\gamma\delta(t)}{(p(t))^{\lambda-1}(\delta(\sigma(t)))^{\lambda}}(w(\sigma(t)))^{\lambda},$$

这里 $\lambda = \frac{\gamma+1}{\gamma}$, $(\delta^{\Delta}(t))_+ = \max\{0, \delta^{\Delta}(t)\}$. 利用分部积分公式有 $-\int_{t_*}^{t} r(s)w^{\Delta}(s)\,\Delta(s) = -r(s)w(s)\mid_{t_*}^{t} + \int_{t_*}^{t} r^{\Delta}(s)w(\sigma(s))\,\Delta s$, 所以有

$$\int_{t_*}^{t} Lr(s)\delta(s)q(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^{\gamma}\Delta s \leqslant w(t^*)r(t^*)+\int_{t_*}^{t} Cw(\sigma(s))\Delta s-\int_{t_*}^{t} D(w(\sigma(s)))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\Delta s.$$

因此$\int_{t_*}^{t}\left(Lr(s)\delta(s)q(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^{\gamma}-\frac{\gamma^{\gamma}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{C^{\gamma+1}}{D^{\gamma}}\right)\Delta s\leqslant w(t^*)r(t^*)$. 这与(7) 式矛盾. 证毕.

注 1　定理 1 推广并改进了文献[2] 中定理 3.3 的结果.

由定理 1 的证明方法可以类似地证明下面的结论:

定理 2　假设(6) 式成立. $p\in C^1_{rd}([t_0,\infty)_T,\mathbf{R})$, $p^{\Delta}\geqslant 0$. 存在函数 $H,h\in C_{rd}(D,\mathbf{R})$, 这里 $D\equiv\{(t,s): t\geqslant s\geqslant t_0\}$ 使得 $H(t,t)=0(t\geqslant t_0)$, $H(t,s)>0(t>s\geqslant t_0)$. H 关于 t,s 有非正的连续 Δ 偏导数 $H^{\Delta_s}(t,s)$, 且存在正值 Δ 可导函数 $\delta(t)$ 满足 $H^{\Delta_s}(t,s)+H(t,s)\frac{\delta^{\Delta}(s)}{\delta^{\sigma}(s)}=-\frac{h(t,s)}{\delta^{\sigma}(s)}(H(t,s))^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}$, $\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}K(t,s)\Delta s=\infty$, 这里 $K(t,s)=LH(t,s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^{\gamma}\delta(s)q(s)-\frac{p(s)(h_-(t,s))^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}}$. 则方程(1) 在$[t_0,\infty)_T$ 上振动.

定理 3　假设 (6) 式成立. $p\in C^1_{rd}([t_0,\infty)_T,\mathbf{R})$, $p^{\Delta}(t)\geqslant 0$, 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{t^{\gamma}}{p(t)}\int_t^{\infty}q(s)\Delta(s)>\frac{1}{L}\limsup_{t\to\infty}\left(\frac{t}{\tau(t)}\right)^{\gamma},$$

则方程(1) 在$[t_0,\infty)_T$ 上振动.

证明　假设方程(1) 在$[t_0,\infty)_T$ 上有非振动解 $x(t)$. 不失一般性, 不妨设 $x(t)>0$, $x(\tau(t))>0$, $t\geqslant t^*\geqslant t_0$. 对 $T\geqslant t\geqslant t^*$, 由方程(1) 和引理 3 得

$$\int_t^T q(s)f(x(\tau(s)))\Delta s=p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma}-p(T)(x^{\Delta}(T))^{\gamma}<p(t)(x^{\Delta}(t))^{\gamma},$$

因此$\frac{1}{p(t)}\int_t^{\infty}q(s)f(x(\tau(s)))\Delta s<(x^{\Delta}(t))^{\gamma}$, $\frac{L}{p(t)}\int_t^{\infty}q(s)(x(\tau(s)))^{\gamma}\Delta s<\left(\frac{x(t)}{t}\right)^{\gamma}$, 进而

$$\frac{Lt^{\gamma}}{p(t)}\int_t^{\infty}q(s)\Delta(s)<\left(\frac{x(t)}{x(\tau(t))}\right)^{\gamma}=\left(\frac{x(t)}{t}\frac{\tau(t)}{x(\tau(t))}\frac{t}{\tau(t)}\right)^{\gamma}<\left(\frac{t}{\tau(t)}\right)^{\gamma},$$

所以$\limsup_{t\to\infty}\frac{t^{\gamma}}{p(t)}\int_t^{\infty}q(s)\Delta s\leqslant\frac{1}{L}\limsup_{t\to\infty}\left(\frac{t}{\tau(t)}\right)^{\gamma}$. 这与已知矛盾. 证毕.

注 2　定理 3 改进了文献[3] 中定理 3 和定理 4 的结果.

3　实例

例 1　考察时间尺度上二阶半线性时滞动力方程$((x^{\Delta}(t))^3)^{\Delta}+\frac{\eta}{t\tau^3(t)}x^3(\tau(t))=0$, $t\in[1,\infty)_T$. 这里 $\tau(t)=\frac{t}{2}$. 显然满足(6) 式. 因为

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{t^{\gamma}}{p(t)}\int_t^{\infty}q(s)\Delta(s)=\limsup_{t\to\infty}t^3\int_t^{\infty}\frac{\eta}{s\tau^3(s)}\Delta s=8\eta\limsup_{t\to\infty}t^3\int_t^{\infty}\frac{1}{s^4}\Delta s\geqslant$$

$$\frac{8}{3}\eta\limsup_{t\to\infty}t^3\int_t^{\infty}\frac{3}{s^3\sigma(s)}\Delta s\geqslant\frac{8}{3}\eta\limsup_{t\to\infty}t^3\int_t^{\infty}\frac{s^2+s\sigma(s)+\sigma^2(s)}{s^3\sigma^3(s)}\Delta s=$$

$$\frac{8}{3}\eta\limsup_{t\to\infty}t^3\int_t^{\infty}\left(-\frac{1}{s^3}\right)^{\Delta}\Delta s=\frac{8}{3}\eta,$$

所以由定理 3, 当 $\eta>3$ 时该方程振动.

注 3　文献[3] 中的定理不能给出该方程是振动的.

参考文献:

[1] AGARWAL R P, BOHNER M, SAKER S H. Oscillation of Second Order Delay Dynamic Equations [J]. Canadian Applied Mathematics Quarterly, 2005, 13(1): 1- 18.

[2] HAN Zhen-lai, SHI Bao, SUN Shu-rong. Oscillation Criteria for a Class of Second Order Emden-Fowler Delay Dynamic Equations on Time Scales [J]. J. Math. Anal. Appl., 2007, 334(2): 847- 858.

[3] 韩振来, 孙书荣, 时　宝. 时间尺度上一类二阶时滞动力方程的振动定理 [J]. 上海交通大学学报, 2007(10): 1 718-

1 721.
[4] SAKER S H. Oscillation of Second Order Nonlinear Neutral Delay Dynamic Equations on Time Scales [J]. J. Comp. Appl. Math., 2006, 187(2): 123- 141.
[5] SAKER S H. Oscillation Criteria of Second2Order Half2Linear Dynamic Equations on Time Scales [J]. J. Comp. Appl. Math., 2005, 177(2): 375- 387.
[6] HASSAN T S. Oscillation for Half2Linear Dynamic Equations on Time Scales [J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 345: 176- 185.
[7] 韩振来, 时 宝, 孙书荣. 时间尺度上二阶时滞动力方程的振动性 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2007, 46(6): 10 - 14.
[8] 孙书荣, 韩振来, 张承慧. 时间尺度上二阶 Emden2Fowler 中立型时滞动力方程的振动准则 [J]. 上海交通大学学报, 2008, 42(12): 2 070- 2 075.
[9] SUN Shu2rong, HAN Zhen2lai, ZHANG Cheng2hui. Oscillation of Second2Order Delay Dynamic Equations on Time Scales [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2009, 30(1- 2): 459- 468.

Oscillation of One Kind of Second2Order Delay Dynamic Equations on Time Scales

LI Tong2xing[1], HAN Zhen2lai[1,2], SUN Shu2rong[1]
(1. School of Sciences, University of Ji nan, Ji nan 250022, China; 2. School of Control Science and Engineer, Shandong University, Ji nan 250061, China)

Abstract: By means of Riccati transformation and time scales, this paper establishes some oscillation theo2 rems for the second2order nonlinear delay dynamic equation on time scales.

Key words: time scales; delay dynamic equations; oscillation

(责任编辑 向阳洁)

(上接第 23 页)

参考文献:

[1] HIROTA R. Exactsolution of the Korteweg2de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons [J]. Phys. Rev. Lett., 1971, 27: 1 192- 1 194.
[2] 楼森岳. 推广的 Painlev 展开及 KdV 方程的非标准截断解 [J]. 物理学报, 1998, 47: 1 739- 1 745.
[3] 李志斌, 张善卿. 非线性波方程准确孤立波解的符号计算 [J]. 数学物理学报, 1997, 17(1): 81- 89.
[4] WANG M L, ZHOU Y B, LI Z B. Application of Homogeneous Balance Method to Exact Solutions of Nonlinear Equa2 tions in Mathematical Physics [J]. Phys. Lett. A, 1996, 213: 67- 75.
[5] 刘式适, 傅遵涛, 刘式达, 等. Jacobi 椭圆函数展开法及其在求解非线性波动方程中的应用 [J]. 物理学报, 2001, 50 (11): 2 068- 2 073.
[6] 傅海明, 戴正德. 一个(2+ 1) - 维激光方程的孤波解 [J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 2009, 45 (1): 44- 47.

Exact Solutions Kaup2Kupershmidt Equation

FU Hai2ming, DAI Zheng2de
(Mathematics Department, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: The algebraic method, based on the symbolic computation, has been applied to study new trave2 ling wave solutions for Kaup2Kupershmidt equation by means of Epsilon package in Maple. More new ex2 plicit travelling wave solutions are obtained, which contain periodic solutions of Jacobi elliptic function, hyperbola function and triangular periodic solutions.

Key words: Kaup2Kupershmidt equation; F2expansion method; solitary wave solutions (责任编辑 向阳洁)