第29卷 第1期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 29 No. 1
2008年1月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) Jan. 2008

文章编号:1007-2985(2008)01-0007-03

反向混合单调算子新的不动点定理*

栾世霞,孙钦福,赵艳玲
(曲阜师范大学数学科学学院,山东 曲阜 273165)

摘 要:利用锥理论和非对称迭代方法,研究了Banach空间一类反向混合单调算子方程解的存在唯一性,并给出了迭代序列收敛于解的误差估计,所得结果改进和推广了混合单调算子方程某些已知相应结果.

关键词:非对称迭代;反向混合单调算子;正规锥;不动点
中图分类号:O177.91 文献标识码:A

在Banach空间中,混合单调算子和反向混合单调算子是2类重要的算子.对于混合单调算子,特别是对于在适当的序条件下的非线性单调算子问题,应用迭代方法得出了许多好的结果;但对于反向混合单调算子解的存在性问题却涉及甚少.笔者利用非对称迭代法研究了半序空间中反向混合单调算子方程解的存在唯一性,并给出了迭代序列收敛于解的误差估计,改进了文献[1]的主要结果,当然也统一和改进了文献[2-5]的结果.

以下总假设E是一个实Banach空间,P是E中的正规锥,N为P的正规常数,半序$\leqslant$是由锥P诱导的.

定义1[6] 设$x_0\in E, y_0\in E$,有$x_0< y_0$,称集合$[x_0,y_0]=\{x\mid x_0\leqslant x\leqslant y_0\}$为$E$中的序区间.

定义2[6] 设非空集$D\subset E$,算子$A:D\times D\to E$称为反向混合单调算子,如果:

(1) 对每个固定的$y\in D$,$A(x,y)$在D上关于x是单调递减的,即$\forall\ x_1< x_2\in[x_0,y_0]$,有$A(x_2,y)\leqslant A(x_1,y)$,$x_0\leqslant y\leqslant y_0$;

(2) 对每个固定的$x\in D$,$A(x,y)$在D上关于y是单调递增的,即$\forall\ y_1< y_2\in[x_0,y_0]$,有$A(x,y_1)\leqslant A(x,y_2)$,$x_0\leqslant x\leqslant y_0$.

定理1 设P是E中的正规锥,N为P的正规常数,$A:[x_0,y_0]\times[x_0,y_0]\to E$的反向混合单调算子,且存在正的有界线性算子$L,M:E\to E$,满足下列3个条件:

(H_1) $x_0+L(y_0-x_0)\leqslant A(y_0,x_0)$,$A(x_0,y_0)\leqslant y_0$;

(H_2) $A(x,y)-A(y,x)\leqslant M(y-x)$,$x_0\leqslant x< y\leqslant y_0$;

(H_3) 谱半径$0< r(L+M)<1$.

则反向混合单调算子$A(x,y)$在$[x_0,y_0]$上有唯一的公共不动点x^*.构造迭代序列

$$\begin{cases} x_{n+1}=A(y_n,x_n)-L(y_n-x_n), \\ y_{n+1}=A(x_n,y_n) \qquad n=0,1,2,\cdots, \end{cases}$$

则$\{x_n\}\{y_n\}$都收敛于x^*,且有误差估计式

$$\|x_n(\text{或 } y_n)-x^*\|\leqslant Nr^n\|y_0-x_0\| \qquad n>n_0, r(L+M)<r<1.$$

证明 (i) 利用数学归纳法验证

$$x_{n-1}\leqslant x_n\leqslant y_n\leqslant y_{n-1} \qquad n=1,2,\cdots. \tag{1}$$

事实上,$n=1$时,由条件(H_1)得

$$x_0\leqslant A(y_0,x_0)-L(y_0-x_0)=x_1\leqslant A(y_0,x_0)\leqslant A(x_0,y_0)=y_1\leqslant y_0,$$

* 收稿日期:2007-10-08
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771117);高等学校博士点专项基金资助项目(20060446001);山东省青年基金资助项目(Q2007A02)
作者简介:栾世霞(1972-),女,山东高密人,曲阜师范大学数学科学学院副教授,博士,主要从事非线性泛函分析研究;孙钦福(1967-),男,山东高密人,曲阜师范大学数学科学学院副教授,硕士,主要从事非线性泛函分析研究.

则(1) 式成立.

假设 $n=k$ 时(1) 式成立, 即有

$$x_{k-1}\leqslant x_k\leqslant y_k\leqslant y_{k-1},$$

从而有 $L(y_k-x_k)\leqslant L(y_{k-1}-x_{k-1})$.

又由于 A 是 $[x_0,y_0]\times[x_0,y_0]$ 上的反向混合单调算子, 因此

$$A(y_{k-1},x_{k-1})\leqslant A(y_k,x_k)\leqslant A(x_k,y_{k-1})\leqslant A(x_{k-1},y_{k-1}).$$

当 $n=k+1$ 时, 由归纳假设得

$$x_k=A(y_{k-1},x_{k-1})-L(y_{k-1}-x_{k-1})\leqslant A(y_{k-1},x_{k-1})-L(y_k-x_k)\leqslant A(y_k,x_k)-L(y_k-x_k)=$$
$$x_{k+1}\leqslant A(y_k,x_k)\leqslant A(x_k,y_k)=y_{k+1}\leqslant A(x_{k-1},y_{k-1})=y_k.$$

由归纳法知(1) 式成立.

(ii) 下证 $\{x_n\}\{y_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 序列.

由(i) 和条件(H_2) 以及 A 的反向混合单调性, 得

$$\theta\leqslant y_n-x_n=A(x_{n-1},y_{n-1})-A(y_{n-1},x_{n-1})+L(y_{n-1}-x_{n-1})\leqslant$$
$$M(y_{n-1}-x_{n-1})+L(y_{n-1}-x_{n-1})=(L+M)(y_{n-1}-x_{n-1}),$$

继续可得

$$\theta\leqslant y_n-x_n\leqslant(L+M)(y_{n-1}-x_{n-1})\leqslant\cdots\leqslant(L+M)^n(y_0-x_0). \tag{2}$$

根据锥 P 的正规性, 得

$$\|y_n-x_n\|\leqslant N\|L+M\|^n\|y_0-x_0\|.$$

又

$$\theta\leqslant x_{n+m}-x_n\leqslant y_n-x_n\leqslant(L+M)^n(y_0-x_0),$$
$$\theta\leqslant y_n-y_{n+m}\leqslant y_n-x_n\leqslant(L+M)^n(y_0-x_0).$$

由锥 P 正规可得

$$\|x_{n+m}-x_n\|\leqslant N\|L+M\|^n\|y_0-x_0\|, \tag{3}$$
$$\|y_n-y_{n+m}\|\leqslant N\|L+M\|^n\|y_0-x_0\|. \tag{4}$$

因为 $r(L+M)<1$, 所以取 $r: r(L+M)<r<1$, 由

$$\lim_{n\to\infty}\|(L+M)^n\|^{\frac{1}{n}}=r(L+M)<r<1,$$

可知存在 n_0, 使得

$$\|(L+M)^n\|<r^n\qquad n>n_0.$$

于是由(3), (4) 式, 可得

$$\|x_{n+m}-x_n\|\leqslant Nr^n\|y_0-x_0\|\qquad n>n_0, \tag{5}$$
$$\|y_n-y_{n+m}\|\leqslant Nr^n\|y_0-x_0\|\qquad n>n_0. \tag{6}$$

因此 $\{x_n\}\{y_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 序列.

(iii) 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$, $\lim_{n\to\infty}y_n=\bar{y}$, 则 $\bar{x}=\bar{y}=x^*$ 就是 $A(x,y)$ 的不动点, 由(1) 式得

$$x_n\leqslant\bar{x}\leqslant\bar{y}\leqslant y_n,\ \theta\leqslant\bar{y}-\bar{x}\leqslant y_n-x_n.$$

又由(2) 式得

$$\theta\leqslant\bar{y}-\bar{x}\leqslant y_n-x_n\leqslant(L+M)^n(y_0-x_0).$$

根据锥 P 的正规性, 得

$$\|\bar{y}-\bar{x}\|\leqslant Nr^n\|y_0-x_0\|,$$

即

$$x_0\leqslant\bar{x}=\bar{y}=x^*\leqslant y_0.$$

进一步有

$$x_n\leqslant A(y_{n-1},x_{n-1})\leqslant A(x^*,x^*)\leqslant A(x_{n-1},y_{n-1})=y_n.$$

因此

$$\theta\leqslant A(x^*,x^*)-x_n\leqslant y_n-x_n\leqslant(L+M)^n(y_0-x_0).$$

根据锥 P 的正规性, 得

$$\|A(x^*,x^*)-x_n\|\leqslant Nr^n\|y_0-x_0\|\qquad n>n_0,$$

故

$$\|A(x^*,x^*)-x^*\| \leqslant \|A(x^*,x^*)-x_n\|+\|x_n-x^*\| \leqslant 2Nr^n\|y_0-x_0\| \qquad n>n_0.$$

令 $n\to\infty$, 得

$$A(x^*,x^*)=x^*.$$

(iv) x^* 是唯一的. 设 y^* 也是 $A(x,y)$ 在 $[x_0,y_0]$ 上的不动点, 则

$$x_1=A(y_0,x_0)-L(y_0-x_0)\leqslant A(y_0,x_0)\leqslant A(y^*,y^*)=y^*\leqslant A(x_0,y_0)=y_1.$$

由数学归纳法得 $x_n\leqslant y^*\leqslant y_n$, 则

$$\theta\leqslant y^*-x_n\leqslant y_n-x_n\leqslant(L+M)^n(y_0-x_0).$$

根据锥 P 的正规性, 得

$$\|y^*-x_n\|\leqslant Nr^n\|y_0-x_0\| \qquad n>n_0,$$

从而

$$\|y^*-x^*\|\leqslant\|y^*-x_n\|+\|x_n-x^*\|\leqslant 2Nr^n\|y_0-x_0\| \qquad n>n_0.$$

令 $n\to\infty$ 得 $y^*=x^*$, 即 x^* 是唯一的. 最后在(5), (6) 式中令 $m\to\infty$ 便可得到误差估计式.

推论 1　设 P 是 E 中的正规锥, N 为 P 的正规常数, $A:[x_0,y_0]\times[x_0,y_0]\to E$ 的反向混合单调算子, 且存在正的有界线性算子 $M:E\to E$, 满足下列 3 个条件:

(H_1) $x_0\leqslant A(y_0,x_0)$, $A(x_0,y_0)\leqslant y_0$;

(H_2) $A(x,y)-A(y,x)\leqslant M(y-x)$, $x_0\leqslant x<y\leqslant y_0$;

(H_3) 谱半径 $0<r(M)<1$.

则混合单调算子 $A(x,y)$ 在 $[x_0,y_0]$ 上有唯一的公共不动点 x^*. 构造迭代序列

$$\begin{cases} x_{n+1}=A(y_n,x_n), \\ y_{n+1}=A(x_n,y_n) \qquad n=0,1,2,\cdots, \end{cases}$$

则 $\{x_n\}\{y_n\}$ 都收敛于 x^*, 且有误差估计式

$$\|x_n(\text{或 } y_n)-x^*\|\leqslant Nr^n\|y_0-x_0\| \qquad n>n_0,\ r(M)<r<1.$$

类似于定理 1 的证明可得推论 1 成立.

注 1　定理 1 推广和改进了文献[1] 中定理 1 的结果.

注 2　利用定理 1 可以讨论 Banach 空间中许多类型的非线性积分方程、微分方程和微分- 积分方程的求解问题.

参考文献:

[1] 盛梅波, 左黎明, 席国忠. 关于混合单调算子新的不动点定理及应用 [J]. 华东交通大学学报: 自然科学版, 2003, 20(5): 118- 120.

[2] GUO D, LAKSHMINKANTHAM V. Coupled Fixed Points of Nonlinear Operators with Application [J]. Nonlinear Anal., 1987, (11): 623- 632.

[3] ZHANG Shi-sheng, GUO Wei-ping. On the Existence and Uniqueness Theorems of Solutions for the Systems of Mixed Monotone Operator Equations with Applications [J]. Applied Mathematics. A Journal of Chinese Universties (SerB), 1993, 8: 11- 14.

[4] 张志涛. 混合单调算子的不动点定理及其应用 [J]. 数学学报, 1998, 41(6): 1 121- 1 126.

[5] 康　平, 孟东沅. 关于两个非线性非单调二元算子的公共不动点定理及其应用 [J]. 曲阜师范大学学报: 自然科学版, 2006, 32(2): 19- 24.

[6] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 第 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2000.

Fixed Point Theorems of Mixed Monotone Operator

LUAN Shi-xia, SUN Qin-fu, ZHAO Yan-ling

(School of Mathematical Science, Qufu Normal University, Qufu 273165, Shandong China)

Abstract: Using the cone theory and non-symmetric iteration method, the author studies the existence and uniqueness of solutions to a class of anti-monotone operator equations in Banach spaces. And the iteration sequences which converge to solution of operator equations and the error estimates are also given. The results presented improve and generalize some corresponding results for mixed monotone operator.

Key words: non-symmetric iteration; anti-mixed monotone operator; normal cone; fixed point

(责任编辑　向阳洁)