第 29 卷 第 2 期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 29 No. 2
2008 年 3 月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) Mar. 2008

文章编号: 1007-2985(2008)02-0005-02

给定控制数的树的代数连通度的上界*

冯立华
(山东工商学院数学学院,山东 烟台 264005)

摘 要: 讨论了给定控制数的树的代数连通度的上界,并对极图给出了刻画.

关键词: 树; 控制数; 代数连通度
中图分类号: O157.5 文献标识码: A

在文中只考虑简单连通图. 设连通图 $G = (V, E)$ 是具有 n 个顶点的简单图,其顶点集与边集分别为 V 和 E. 图 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 是关于 G 的(0,1) 邻接矩阵,它的第 (i,j) 个元素是1, 当 (i,j) 是一条边时,在其他情况下为0. $\boldsymbol{A}(G)$ 的最大特征值称为 G 的谱半径,记为 $\rho(G)$. 令 $\boldsymbol{D}(G)$ 是图的度对角线矩阵. 称矩阵 $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$ 是图的Laplacian 矩阵, $\boldsymbol{L}(G)$ 的次小特征值表示为 λ, 称为 G 的代数连通度[1]. 其他关于图的谱方面的内容见文献[2].

下面介绍一下文中用到的术语. 图的直径是图中两点间距离的最大值. P_t 表示具有 t 个顶点的路. V 的一个顶点子集 S 称为 G 的一个控制集,如果对于每一个 $v \in V - S$, 总存在一个点 $u \in S$, 使得 u 与 v 相邻. G 的最小控制集的基数就是 G 的控制数,记为 $\gamma(G)$. P_t 表示具有 t 个顶点的路. 令 $K_{1,m}$ 表示 $m+1$ 个定点的星图. 若 $m \leqslant \frac{n}{2}$, 则树 $T_{n,m}$ 是由 $K_{1,m}$ 的 $m-1$ 条悬挂边上再增加一个悬挂点而得到. 显然, $T_{n,m}$ 的控制数就是 m. 其他图论中的术语见文献[3].

代数连通度与图的结构有密切的联系,与图的其他特征值相比,它更能反映图的性质,因此关于代数连通度的研究是近年来一个十分热门的话题. 文献[4] 对直径为 3 的树的代数连通度作了排序. 文献[5-6] 对给定直径具有完美匹配,或对给定围长的图的代数连通度作了研究,并对部分的图类得到了极图. 关于这方面的一个综述见文献[7].

引理 1[6] 设 G 是一个具有 n 个顶点的简单连通图,图 H 是由 G 通过粘贴一个悬挂点而得到的具有 $n+1$ 个顶点的连通图,则 $\lambda(H) \leqslant \lambda(G)$.

通过直接的计算,得到如下结论:

引理 2 $T_{n,\gamma}$ 的特征多项式为

$$\lambda(\lambda-1)^{n-2\gamma}(\lambda^2-3\lambda+1)^{\gamma-2}[\lambda^3-(n-\gamma+4)\lambda^2+(3n-3\gamma+4)\lambda-n].$$

若 $\gamma = 1$, 则 $\lambda(T_{n,\gamma}) = 1$, 此时 $T = K_{1,n-1}$. 若 $\gamma = 2$, 则 $\lambda(T_{n,\gamma})$ 是方程 $\lambda^3-(n+2)\lambda^2+(3n-2)\lambda-n = 0$ 的最小根. 若 $\gamma \geqslant 3$, 则 $\lambda(T_{n,\gamma}) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

收稿日期: 2007-04-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10531070); 山东省教育厅科学研究项目(J07YH03)
作者简介: 冯立华(1979-),男,山东日照人,山东工商学院数学学院副教授,上海交通大学博士,主要从事组合矩阵论研究.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定理1 令树 T 有 n 个顶点且控制数为 $\gamma \geqslant 1$. 若 $\gamma = 1$, 则 $\lambda(T) = 1$, 此时 $T = K_{1,n-1}$. 若 $\gamma = 2$, 则 $\lambda(T) \leqslant \lambda(T_{n,2})$, 等号成立当且仅当 $T = T_{n,2}$. 若 $\gamma \geqslant 3$, 则 $\lambda(T) \leqslant \lambda(T_{n,\gamma})$, 等号成立当且仅当 $T = T_{n,\gamma}$.

证明 若 $\gamma = 1$, 此时只有1个图, $T = K_{1,n-1}$, 显然 $\lambda(T) = 1$.

若 $\gamma = 2$, 首先由引理2, 有

$$P_\lambda(T_{n,2}) = \lambda(\lambda - 1)^{n-4}[\lambda^3 - (n+2)\lambda^2 + (3n-2)\lambda - n] = (\lambda^2 - 3\lambda + 1)(\lambda - n + 1) - 1 = 0,$$

所以 $\lambda(T_{n,2}) > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

对于任意的树 T, 若 $\gamma = 2$ 而树 T 的直径至少为4, 则 T 含有 P_5 作为它的子图. 由引理1, 有 $\lambda(T) \leqslant \lambda(P_5) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \lambda(T_{n,2})$. 若 T 的直径为3, 则由文献[4]中的推论2, 有 $\lambda(T) \leqslant \lambda(T_{n,2})$.

若 $\gamma \geqslant 3$. 设 T 的直径大于等于5, 则 T 含有 P_6 作为子图. 由引理1, 有

$$\lambda(T) \leqslant \lambda(P_6) = 2 - \sqrt{3} < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \lambda(T_{n,\gamma}).$$

若 T 的直径为3, 则不可能有 $\gamma \geqslant 3$, 因此 T 的直径至少为4. 现在考虑直径恰好为4的情况. 由引理1, 有

$$\lambda(T) \leqslant \lambda(P_5^*) < \lambda(P_5) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \lambda(T_{n,\gamma}),$$

这里 P_5^* 是由一条5个顶点的路在其度为2的3个顶点之一加上一个悬挂点而得到. 证毕.

参考文献:

[1] FIEDLER M. Algebraic Connectivity of Graphs [J]. Czechoslovake Math. J., 1973, 23(98): 296-305.

[2] CVETKOVIC D, DOOB M, SACHS H. Spectra of Graphs [M]. New York: Academic Press, 1980.

[3] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. New York: Macmillan Press, 1976.

[4] GRONE R, MERRIS G. Ordering Trees by Algebraic Connectivity [J]. Graphs Combin, 1990, 6: 229-237.

[5] FALLAT S, KIRKLAND S. Extremizing the Algebraic Connectivity Subject to Graph Theoretic Constraints [J]. Electron. J. Linear Algebra, 1998, 3: 48-74.

[6] MOLITIERNO J, NEUMANN M. On Trees with Perfect Matching [J]. Linear Algebraic Appl., 2003, 326: 75-85.

[7] DE ABREU N M M. Old and New Results on Algebraic Connectivity of Graphs [J]. Linear Algebra Appl., 2007, 423: 53-73.

Upper Bounds on the Algebraic Connectivity of Trees with Given Domination Number

FENG Li-Hua

(School of Mathematics, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005, Shandong China)

Abstract: This paper presents a sharp upper bounds on the algebraic connectivity of trees with given domination number.

Key words: tree; domination number; algebraic connectivity

(责任编辑 向阳洁)

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net