文章编号: 1007-2985(2008)03-0005-03

一类非混合单调算子新的不动点定理 *

孙钦福, 高 涛, 刘元健, 赵艳玲
(曲阜师范大学数学科学学院, 山东 曲阜 273165)

摘 要: 利用锥理论和非对称迭代方法, 讨论了 Banach 空间不具有单调性、连续性和紧性条件, 而只满足某些序条件的非混合单调算子方程解的存在唯一性及迭代收敛性, 并给出了此迭代的误差估计, 所得结果改进和推广了混合单调算子方程的某些已知结果.

关键词: 锥与半序; 正规锥; 混合单调算子; 不动点
中图分类号: O177.91　　文献标识码: A

关于 Banach 空间中非线性算子方程 $Ax = x$ 的迭代求解问题, 已有许多研究, 并得到了一批好的结果, 但对算子和锥附加的条件都比较强. 笔者对算子的单调性、连续性和紧性不做任何假定, 利用谱半径理论以及锥理论迭代技巧, 证明了不动点的存在唯一性, 并给出了迭代序列收敛于解的误差估计, 改进和推广了文献中的相应结果.

以下总假设 E 是一个实 Banach 空间, P 是 E 中的正规锥, N 为锥 P 的正规常数, θ 表示 E 中的零元素, E 中半序 $\leqslant$ 由锥 P 导出, 关于锥和半序理论参见文献[1]. 设 $u_0 \in E, v_0 \in E$, 有 $u_0 < v_0$, 称 $D = [u_0, v_0] = \{x \mid u_0 \leqslant x \leqslant v_0\}$ 为 E 中的序区间.

定义 1 若存在 N, 使得 $\theta \leqslant x \leqslant y \in E$, 有 $\|x\| \leqslant N\|y\|$, 则称 P 是 E 中的正规锥, N 为锥 P 的正规常数.

定义 2 设非空集 $D \subset E$, 算子 $A: D \times D \to E$ 称为混合单调算子, 若 $\forall u_1 < u_2, v_2 < v_1, u_i, v_i \in [u_0, v_0], i = 1, 2$, 则有 $A(u_1, v_1) \leqslant A(u_2, v_2)$.

定义 3 设 $A: D \times D \to E$ 是 D 上的算子, 若存在 $x^* \in D$, 使得 $A(x^*, x^*) = x^*$, 则称 x^* 是算子 A 在 D 上的一个不动点.

定理 1 设 P 是实 Banach 空间 E 中的正规锥, N 为锥 P 的正规常数, 若存在正的有界线性算子 T_1, T_2, T_3, 且 $I - T_3$ 可逆, 算子 $A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \to E$, 满足下列 5 个条件:

(H_1) $u_0 \leqslant A(u_0, v_0), A(v_0, u_0) \leqslant v_0 - T_1(v_0 - u_0)$;

(H_2) $A(v, u) - A(u, v) \leqslant T_2(v - u), u_0 \leqslant u < v \leqslant v_0$;

(H_3) $T_3(u_2 - u_1) \leqslant A(u_2, v_2) - A(u_1, v_1), u_0 \leqslant u_1 < u_2 \leqslant v_0, u_0 \leqslant v_1 < v_2 \leqslant v_0$;

(H_4) $T_3T_1 = T_1T_3, T_2T_3 = T_3T_2$;

(H_5) 谱半径 $0 < r((I - T_3)^{-1})(r(T_1) + r(T_2) + r(T_3)) < 1$.

则算子 $A(u, v)$ 在 $[u_0, v_0]$ 上有唯一不动点 x^*, 构造迭代序列

$$\begin{cases} u_{n+1} = (I - T_3)^{-1}[A(u_n, v_n) - T_3u_n], \\ v_{n+1} = (I - T_3)^{-1}[A(v_n, u_n) - T_3v_n + T_1(v_n - u_n)], \end{cases} \tag{1}$$

* 收稿日期: 2007-11-11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771117); 高等学校博士点专项基金资助项目(20060446001)
作者简介: 孙钦福(1967-), 男, 山东高密人, 曲阜师范大学数学科学学院副教授, 主要从事非线性泛函分析研究.

那么$\{u_n\}\{v_n\}$都收敛于x^*，且存在n_0，当$n > n_0$时，有

$$\|u_n(\text{或 } v_n) - x^*\| \leqslant Nr^n \|v_0 - u_0\|, r((I - T_3)^{-1})(r(T_1) + r(T_2) + r(T_3)) < r < 1.$$

证明 (i) 令

$$B(u,v) = (I - T_3)^{-1}(A(u,v) - T_3 u) \qquad u, v \in [u_0, v_0].$$

由条件(H_1)知

$$B(u_0, v_0) = (I - T_3)^{-1}(A(u_0, v_0) - T_3 u_0) \geqslant u_0, \tag{2}$$

$$B(v_0, u_0) = (I - T_3)^{-1}(A(v_0, u_0) - T_3 v_0) \leqslant v_0 - (I - T_3)^{-1} T_1(v_0 - u_0) \leqslant v_0,$$

$$\begin{aligned} B(v,u) - B(u,v) = {} & (I - T_3)^{-1}(A(v,u) - T_3 v) - (I - T_3)^{-1}(A(u,v) - T_3 u) = \\ & (I - T_3)^{-1}(A(v,u) - A(u,v) - T_3(v - u)) \leqslant \\ & (I - T_3)^{-1}(T_2 - T_3)(v - u) \qquad u, v \in [u_0, v_0]. \end{aligned}$$

又由条件(H_3)知，对任给的$u_1 \leqslant u_2$，$v_2 \leqslant v_1$，$u_i, v_i \in [u_0, v_0]$，$i = 1, 2$，有

$$\begin{aligned} B(u_2, v_2) - B(u_1, v_1) = {} & (I - T_3)^{-1}(A(u_2, v_2) - T_3 u_2) - (I - T_3)^{-1}(A(u_1, v_1) - T_3 u_1) = \\ & (I - T_3)^{-1}(A(u_2, v_2) - A(u_1, v_1) - T_3(u_2 - u_1)) \geqslant \\ & (I - T_3)^{-1}(T_3(u_2 - u_1) - T_3(u_2 - u_1)) = \theta. \end{aligned}$$

所以$B(u_2, v_2) \geqslant B(u_1, v_1)$，即$B$是混合单调算子. 则迭代序列(1)化为

$$\begin{cases} u_{n+1} = B(u_n, v_n), \\ v_{n+1} = B(v_n, u_n) + (I - T_3)^{-1} T_1(v_n - u_n) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

(ii) 用数学归纳法容易验证

$$u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

事实上，当$n = 1$时，由(2)式，有

$$\begin{aligned} u_0 \leqslant B(u_0, v_0) = u_1 \leqslant B(u_0, v_0) \leqslant B(v_0, u_0) \leqslant B(v_0, u_0) + \\ (I - T_3)^{-1} T_1(v_0 - u_0) = v_1 \leqslant v_0, \end{aligned}$$

即$u_0 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0$，(3)式成立.

假设$n = k$时(2)式成立，即有$u_{k-1} \leqslant u_k \leqslant v_k \leqslant v_{k-1}$. 当$n = k + 1$时，由归纳假设以及$B$是$[u_0, v_0] \times [u_0, v_0]$上的混合单调算子，有

$$u_{k+1} - u_k = B(u_k, v_k) - B(u_{k-1}, v_{k-1}) \geqslant \theta,$$

$$\begin{aligned} v_k - v_{k+1} = {} & B(v_{k-1}, u_{k-1}) + (I - T_3)^{-1} T_1(v_{k-1} - u_{k-1}) - \\ & B(v_k, u_k) - (I - T_3)^{-1} T_1(v_k - u_k) \geqslant \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{k+1} - u_{k+1} = {} & B(v_k, u_k) - B(u_k, v_k) + (I - T_3)^{-1} T_1(v_k - u_k) \geqslant \\ & (I - T_3)^{-1} T_1(v_k - u_k) \geqslant \theta. \end{aligned}$$

故由归纳法可得$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0$.

(iii) 下证$\{u_n\}\{v_n\}$是E中的Cauchy序列. 由

$$\begin{aligned} \theta \leqslant v_n - u_n = {} & B(v_{n-1}, u_{n-1}) - B(u_{n-1}, v_{n-1}) + (I - T_3)^{-1} T_1(v_n - u_n) = \\ & (I - T_3)^{-1}(A(v_{n-1}, u_{n-1}) - T_3 v_{n-1} - A(u_{n-1}, v_{n-1}) + T_3 u_{n-1} + \\ & T_1(v_{n-1} - u_{n-1})) \leqslant (I - T_3)^{-1}(T_1 + T_2 - T_3)(v_{n-1} - u_{n-1}). \end{aligned}$$

由条件(H_4)可得

$$(I - T_3)^{-1}(T_1 + T_2 - T_3) = (T_1 + T_2 - T_3)(I - T_3)^{-1},$$

继续可得

$$\theta \leqslant v_n - u_n \leqslant ((I - T_3)^{-1}(T_1 + T_2 - T_3))^n (v_0 - u_0).$$

又由(3)式知，对任意自然数n, p，有

$$\theta \leqslant u_{n+p} - u_n \leqslant v_n - u_n \leqslant ((I - T_3)^{-1}(T_1 + T_2 - T_3))^n (v_0 - u_0), \tag{4}$$

$$\theta \leqslant v_n - v_{n+p} \leqslant v_n - u_n \leqslant ((I - T_3)^{-1}(T_1 + T_2 - T_3))^n(v_0 - u_0). \tag{5}$$

再由条件(H_4) 及文献[2], 可得

$$r((I - T_3)^{-1}(T_1 + T_2 - T_3)) \leqslant r((I - T_3)^{-1})(r(T_1) + r(T_2) + r(T_3)).$$

因为 $r((I - T_3)^{-1})(r(T_1) + r(T_2) + r(T_3)) < 1$, 所以取 $r: r((I - T_3)^{-1})(r(T_1) + r(T_2) + r(T_3)) < r < 1$. 由

$$\lim_{n\to\infty} \|((I - T_3)^{-1}(T_1 + T_2 - T_3))^n\|^{\frac{1}{n}} = r((I - T_3)^{-1}(T_1 + T_2 - T_3)) < r < 1,$$

可知存在 n_0, 使得 $\|((I - T_3)^{-1}(T_1 + T_2 - T_3))^n\| < r^n, n > n_0$. 于是由(4), (5) 式及锥 P 正规, 可得

$$\|u_{n+p} - u_n\| \leqslant N\|((I - T_3)^{-1}(T_1 + T_2 - T_3))^n\|\|v_0 - u_0\| \leqslant Nr^n\|v_0 - u_0\|, \tag{6}$$

$$\|v_n - v_{n+p}\| \leqslant N\|((I - T_3)^{-1}(T_1 + T_2 - T_3))^n\|\|v_0 - u_0\| \leqslant Nr^n\|v_0 - u_0\|. \tag{7}$$

因此$\{u_n\}\{v_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 序列.

(iv) 设$\lim_{n\to\infty} u_n = \bar{u}, \lim_{n\to\infty} v_n = \bar{v}$, 则 $\bar{u} = \bar{v} = x^*$ 就是$A(u, v)$ 的不动点, 易知 $\bar{u}, \bar{v} \in E$, 且 $u_n \leqslant \bar{u} \leqslant \bar{v} \leqslant v_n$. 再由

$$\theta \leqslant \bar{u} - \bar{v} \leqslant v_n - u_n \leqslant ((I - T_3)^{-1}(T_1 + T_2 - T_3))^n(v_0 - u_0),$$

以及锥 P 的正规性可知 $\|\bar{v} - \bar{u}\| \leqslant Nr^n\|v_0 - u_0\|$, 令 $n \to \infty$, 得 $u_0 \leqslant \bar{u} = \bar{v} = x^* \leqslant v_0$. 由 $u_n \leqslant u_{n+p} \leqslant v_n$, 令 $p \to \infty$, 得 $u_n \leqslant x^* \leqslant v_n (n = 1, 2, \cdots)$. 又由

$$u_{n+1} \leqslant B(u_n, v_n) \leqslant B(x^*, x^*) \leqslant B(v_n, u_n) \leqslant B(v_n, u_n) + (I - T_3)^{-1}T_1(v_n - u_n) = v_{n+1},$$

令 $n \to \infty$ 可得 $B(x^*, x^*) = x^*$, 即$(I - T_3)^{-1}(A(x^*, x^*) - T_3 x^*) = x^*$. 由此得 $A(x^*, x^*) = x^*$.

(v) 再证不动点x^* 是唯一的. 设 y^* 也是A 在$[u_0, v_0]$ 中的不动点, 仿上述证明由归纳法易得 $u_n \leqslant y^* \leqslant v_n$. 令 $n \to \infty$, 得 $y^* = x^*$, 故 x^* 是A 在$[u_0, v_0]$ 中的唯一不动点. 最后在(6), (7) 式中令$p \to \infty$, 便可得到误差估计式 $\|u_n(\text{或 } v_n) - x^*\| \leqslant Nr^n\|v_0 - u_0\|$.

推论 1　设P 是实 Banach 空间 E 中的正规锥, N 为锥P 的正规常数, 若存在正的有界线性算子 T_2, T_3, 且 $I - T_3$ 可逆, 算子 $A: [u_0, v_0] \times [u_0, v_0] \to E$, 满足下列 5 个条件:

(H_1) $u_0 \leqslant A(u_0, v_0), A(v_0, u_0) \leqslant v_0$;

(H_2) $A(v, u) - A(u, v) \leqslant T_2(v - u), u_0 \leqslant u < v \leqslant v_0$;

(H_3) $T_3(u_2 - u_1) \leqslant A(u_2, v_2) - A(u_1, v_1), u_0 \leqslant u_1 < u_2 \leqslant v_0, u_0 \leqslant v_1 < v_2 \leqslant v_0$;

(H_4) $T_2 T_3 = T_3 T_2$;

(H_5) 谱半径 $0 < r((I - T_3)^{-1})(r(T_2) + r(T_3)) < 1$.

则算子 $A(u, v)$ 在$[u_0, v_0]$ 上有唯一不动点 x^*, 构造迭代序列

$$\begin{cases} u_{n+1} = (I - T_3)^{-1}[A(u_n, v_n) - T_3 u_n], \\ v_{n+1} = (I - T_3)^{-1}[A(v_n, u_n) - T_3 v_n], \end{cases} \tag{1}$$

那么$\{u_n\}\{v_n\}$ 都收敛于 x^*, 且存在 n_0, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$\|u_n(\text{或 } v_n) - x^*\| \leqslant Nr^n\|v_0 - u_0\|, r((I - T_3)^{-1})(r(T_2) + r(T_3)) < r < 1.$$

注 1　定理 1 推广和改进了文献[3] 中定理的结果, 拓宽了该定理的适用范围.

注 2　文中结论对算子在单调性、连续性和紧性方面没有做任何假定, 在非线性积分方程和微分方程中有一定的应用价值.

参考文献:

[1] 刘炳妹, 刘立山. 二阶方程组解的存在唯一性 [J]. 工程数学学报, 2007, 24(4): 757- 760.

[2] 李炳仁. Banach 代数 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[3] 段华贵, 李国祯. 混合单调算子的不动点定理及应用 [J]. 江西师范大学学报, 2003, 27(4): 356- 360.

(下转第 16 页)

证明　在(9)式中,取 $m=1$,可得

$$h=\sum_{l\geqslant 1}\sum_{i\geqslant 0}\frac{1}{l}\binom{2l-2}{l-1}\binom{l+i-2}{i}y^{l+i-1}=1+\sum_{n\geqslant 1}\sum_{l=1}^{n+1}\frac{1}{l}\binom{2l-2}{l-1}\binom{n-1}{n-l+1}y^{n}.$$

证毕.

参考文献:

[1] TUTTE W T. On the Enumeration of Planar Maps [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1968, 74: 64-74.

[2] TUTTE W T. A Census of Planar Maps [J]. Canad. J. Math., 1963, 15: 249-271.

[3] TUTTE W T. A Census of Slicings [J]. Canad. J. Math., 1962, 14: 708-722.

[4] TUTTE W T. A Census of Planar Triangulations [J]. Canad. J. Math., 1962, 14: 21-38.

[5] HAO Rong-xia, CAI Jun-liang. Counting Rooted Nearly 2-Regular Planar Maps [J]. Northeast Math., 2004, 20(3): 265-270.

[6] 刘彦佩. 数组合地图论 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.

Enumeration of Rooted Nearly 2-Regular Planar Maps

LONG Shu-de

(Department of Mathematics and Information Science, Changsha University, Changsha 410003, China)

Abstract: This paper investigates the enumeration of rooted nearly 2-regular planar maps, provides the enumerating equations satisfied by enumerating functions with the valency of root-face, and the number of edges as two parameters. Some explicit expressions of them are also derived.

Key words: rooted nearly 2-regular planar map; enumerating function; enumerating equation; Lagrangian inversion

(责任编辑　向阳洁)

(上接第7页)

New Fixed Point Theorems for a Class of Non-Mixed Monotone Operators

SUN Qin-fu, GAO Tao, LIU Yuan-jian, ZHAO Yan-ling

(College of Mathematics and Sciences, Qufu Normal University, Qufu 273165, Shandong China)

Abstract: By using the cone theory and non-symmetry iteration method, the existence and uniqueness of solutions of non-mixed monotone operator equations without monotonicity, continuity and compactness conditions are studied, and the iteration sequences which converge to solution of operator equations and the error estimates are also given. The results improve and generalize some known results of mixed monotone operator equation.

Key words: cone and partial; normal cone; mixed monotone operator equations; fixed point

(责任编辑　向阳洁)