

文章编号: 1007- 2985(2008) 05- 0030- 04

光滑曲面片上的 G^1 插值曲线*

苏国荣, 杨松林

(苏州大学数学学院, 江苏 苏州 215006)

摘要: 限制在光滑曲面上的插值曲线是计算机辅助几何设计中一个较新研究方向, 实现在曲面上曲线插值的主要思想是利用曲面与其参数之间的对应关系, 将其转化为一般的曲线插值问题. 提出了一种新的、实用的算法, 将曲面上插值点列和单位切向量投影到平面上, 在平面上构造样条插值曲线, 该样条插值曲线的插值柱面与曲面的交线即为过曲面上给定点列的 G^1 插值曲线.

关键词: BÖzier 曲线; 插值曲线; 样条曲线; G^1 连续

中图分类号: TP391

文献标识码: A

1 问题的提出

在计算机辅助几何设计中, 构造通过空间给定点列且具有一定连续性的插值曲线, 已经是一个比较成熟的理论. 随着计算机图形学理论的不断发展和计算机辅助设计的广泛应用, 如何表示表面上的曲线和构造表面上的插值曲线, 是摆在计算机辅助几何设计人员面前的一个较新的研究方向, 且在处理诸如数控加工中的路径设计以及服装加工中的花纹设计等领域频繁出现的曲面裁剪问题时显得日益重要. 例如, 在服装 CAM 的立体裁剪中经常遇到这样的问题: 先在布料(立体)上给定一些点, 然后过这些点构造一条位于布料上的曲线, 最后机器沿这条曲线进行裁剪.

文献[1- 4] 研究了限制在光滑表面上的曲线插值, 其主要思路是将其转化为一般的曲线插值问题求解, 基于表面及其参数之间的对应关系, 首先在参数域平面上构造插值曲线, 再将该参数域内插值曲线映射到表面上, 获得表面上曲线, 从而实现表面上曲线插值的目的. 文献[1] 基于构造 1 个 $D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ 且像集为表面 Σ 的映射, 将表面上曲线插值归结为通常 \mathbf{R}^2 上的插值曲线构造; 文献[2] 也是将表面上曲线插值归结为通常 \mathbf{R}^2 上的插值曲线构造, 获得了如球面、圆柱面、圆锥面等常用表面上的 NURBS 插值曲线. 进一步用 NURBS 构造表面 Σ , 解其反演方程, 在平面上进行 NURBS 插值, 给出一般参数表面 Σ 上 C^2 曲线插值方法. 上述 2 种方法仅适用于可参数化的表面, 不能适用于一般的光滑表面. 文献[3] 通过给定的插值点及切向量构造 1 条插值曲线, 再利用插值点的表面上的法向量形成直纹面, 表面与直纹面的交线为所求的曲线. 该方法涉及到一般表面的求交, 增加了该方法应用的不稳定性和计算量. 笔者利用曲线投影柱面的方法构造出插值于表面上的给定点列和切方向的 G^1 插值曲线, 首先将表面上的给定点列和切方向投影到平面, 然后在平面上构造 1 条样条插值曲线和该插值曲线关于平面(一般是坐标面, 可以根据表面的具体情形对表面作适当的旋转处理)的投影柱面- 插值柱面, 最后通过插值柱面和表面求交的方法, 得到表面上的 G^1 连续的插值曲线. 该方法的优点是不需要建立表面间的映射而直接通过几何方法进行处理, 在插值柱面是曲线关于坐标面的投影柱面时, 插值柱面和表面的交线易求, 且该方法适用于一切表面(参数表面和非参数表面).

文中讨论的光滑表面 Σ 经过适当旋转后, $\Sigma: \mathbf{R} = \mathbf{R}(u, v)$ 的单位法向量

$$N = \frac{\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v}{|\mathbf{R}_u \times \mathbf{R}_v|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

* 收稿日期: 2008- 02- 27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571129)

作者简介: 苏国荣(1964-), 男, 江苏苏州人, 苏州大学数学学院讲师, 主要从事计算几何研究; 杨松林(1964-), 男, 江苏通州人, 苏州大学数学学院副教授, 博士, 主要从事微分几何研究.

满足 $\cos \gamma$ 保持固定的符号.

2 预备知识

设参数曲线 Γ 的方程为

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

它关于坐标面 oxy 的投影柱面为

$$\Sigma_{xy}: \mathbf{r}(u, v) = (x(u), y(u), v) \quad \alpha \leq u \leq \beta, -\infty < v < +\infty.$$

引理 1 若空间曲线是 C^r 光滑的, 则它关于平面的投影柱面是 C^r 光滑曲面.

引理 2 曲面的光滑性在平移和旋转变换下不变.

引理 3 设曲线 Γ 是光滑曲面 Σ 上的一条光滑曲线, 则 Γ 上一点处的切方向与 Γ 关于平面的投影曲线上对应点处的切方向相互决定.

证明 设 A 是曲线 Γ 上一点, T 是曲线 Γ 的 A 处的单位切向量, 平面 π 是 Σ 上 A 点处的切平面, 则 T 平行于 π .

设曲面 Σ_{xy} 是曲线 Γ 关于坐标面 oxy 的投影柱面, 平面 π_p 是投影柱面 Σ_{xy} 在 A 处的切平面, 则 T 平行于 π_p .

设曲线 Γ_{xy} 是 Γ 关于坐标面 oxy 的投影曲线, 点 A_{xy} 是点 A 关于坐标面 oxy 的投影点, 则 Γ_{xy} 在 A_{xy} 处的单位切向量 T_{xy} 平行于平面 π_p 与坐标面 oxy 的交线.

因为对 A 点而言, 切平面 π 和 π_p 是固定的, 所以 T 和 T_{xy} 可以相互决定.

引理 4 若曲面 Σ_1 和 Σ_2 分别是 C^{r_1} 和 C^{r_2} 光滑的, 且在交线上每一点的法向量不平行, 则这 2 张曲面的交线是 $C^{\min(r_1, r_2)}$ 连续的.

3 平面上的插值曲线与插值柱面

给定平面上 $n+1$ 个数据点 P_0, P_1, \dots, P_n 和 $n+1$ 个单位向量 T_0, T_1, \dots, T_n .

在以 $P_{i-1} (0 < i \leq n)$ 为起点, T_{i-1} 为方向的射线上取点 P_i^1 , 以 P_i 为起点, $-T_i$ 为方向的射线上取点 P_i^2 , 则以 $P_i^0 \equiv P_{i-1}, P_i^1, P_i^2, P_i^3 \equiv P_i$ 为控制点的 B \bar{O} zier 曲线^[5] 为

$$P_i^3(u) = P_i^0 B_{0,3}(u) + P_i^1 B_{1,3}(u) + P_i^2 B_{2,3}(u) + P_i^3 B_{3,3}(u) = \sum_{j=0}^3 P_i^j B_{j,3}(u) \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (1)$$

该曲线在 P_i, P_{i+1} 处分别与 T_i 和 T_{i+1} 相切.

将上述 n 段曲线顺序组合得到 1 条插值于 P_i 且切于单位向量 T_i 的 3 次 B \bar{e} zier 样条曲线.

记 $l_i = \|P_{i-1}P_i\|, l = \sum_{i=1}^n l_i$, 令 $t_0 = 0, t_i = \sum_{j=1}^i l_j, i = 1, 2, \dots, n, u = \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}, t \in (t_{i-1}, t_i)$, 根据(1) 式组合各插值区间上的曲线, 得

$$P(t) = P_i^3(u) = P_i^3\left(\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right) \quad t \in (t_{i-1}, t_i). \quad (2)$$

由 B \bar{O} zier 曲线的端点性质^[5] 得如下结论:

定理 1 曲线 $\Gamma: P(t) (t \in [0, 1])$ 为插值于点 P_0, P_1, \dots, P_n 且与 T_0, T_1, \dots, T_n 相切的 G^1 连续的样条插值曲线. 设曲线

$$\tilde{\Gamma}: \tilde{P}(u) = \sum_{i=0}^m A_i B_{i,m}(u) \quad 0 \leq u \leq 1$$

是拟合于点 P_0, P_1, \dots, P_n 的 m 次 B \bar{O} zier 曲线, 且采用规范积累弦长参数化 $u_0 = 0, u_i = \frac{t_i}{t_n} (i = 1, 2, \dots, n)$, 使得

$$\tilde{P}(u_i) // T_i.$$

在利用(2) 式构造样条插值曲线时, 经常会遇到所构造的样条插值曲线与插值点的分布形状有较大的误差或样条插值曲线的扭曲, 这时可以根据拟合曲线 $\tilde{\Gamma}$ 来调整(1) 式中的控制点 P_i^j 使得曲线 Γ 的形状符合插值点的分布形状. 可以采用文献[3] 中的方法以防止插值曲线出现扭曲.

插值曲线 $\Gamma: P(t)$ 关于坐标面 oxy 的插值柱面为

$$\Sigma_{xy}: \mathbf{T}(\mu, \nu) = \left(\sum_{j=0}^3 P_i^j(x) B_{j,3}\left(\frac{\mu-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right), \sum_{j=0}^3 P_i^j(y) B_{j,3}\left(\frac{\mu-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right), \nu \right) \quad t_{i-1} \leq \mu \leq t_i, -\infty < \nu < +\infty, i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

其中 $P_i^j(x), P_i^j(y)$ 是点 P_i^j 的 x, y 坐标.

定理 2 插值柱面 Σ_{xy} 的切平面是连续变化的.

证明 当 $t_{i-1} < \mu < t_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 时, r_μ 是 C^∞ 的, r_0 是 C^∞ 的, 所以 $r_\mu \times r_0$ 是 C^∞ 的. 而在结点 $t_i (0 < i < n)$ 处, 当 $\mu \leq t_i$ 和 $\mu \geq t_i$ 时, r_μ 具有相同的方向, r_0 是 C^∞ 的, 所以 $r_\mu \times r_0$ 是连续变化的.

4 曲面片上的光滑插值曲线

如图 1 所示, 给定光滑曲面片 $\Sigma: R(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D$, 曲面上的 $n+1$ 个点 $P_0^\Sigma, P_1^\Sigma, \dots, P_n^\Sigma$, 及 P_i^Σ 处曲面 Σ 的切平面上的单位向量 $T_i^\Sigma (i = 0, 1, \dots, n)$. 文中要解决的问题是: 在曲面 Σ 上构造 1 条 G^1 光滑曲线 Γ , 使之通过插值点列 $P_i^\Sigma (i = 0, 1, \dots, n)$ 且在该点处的单位切向量为 T_i^Σ .

首先, 将插值点列 $P_i^\Sigma (i = 0, 1, \dots, n)$ 和单位切向量 T_i^Σ 投影到坐标面 oxy 得到 $n+1$ 个点 P_i 和 $n+1$ 个单位向量 T_i (将投影向量单位化); 其次, 利用第 3 节中的方法构造 oxy 面上的 G^1 样条插值曲线 $\Gamma_{xy}: P(t)$, 构造曲线 Γ_{xy} 关于坐标面 oxy 的插值柱面 Σ_{xy} ; 最后, 曲面 Σ 和插值柱面 Σ_{xy} 的交线 Γ 为所求的曲面 Σ 上的插值于点 $P_0^\Sigma, P_1^\Sigma, \dots, P_n^\Sigma$ 的插值曲线 (见图 2). 其交线 Γ 的方程为:

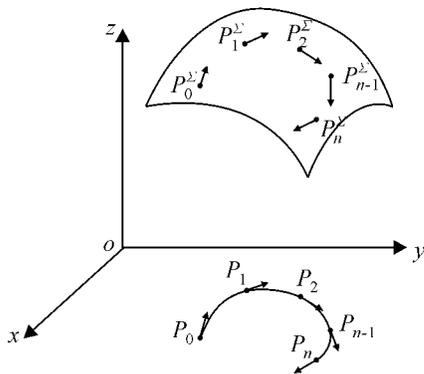


图 1 曲面上数据点与 oxy 面上投影点

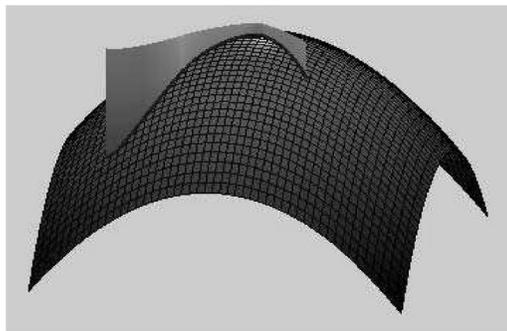


图 2 插值柱面与插值曲线

$$\begin{cases} x(u, v) = \sum_{j=0}^3 P_j^i(x) B_{j,3}(\frac{\mu - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}), \\ y(u, v) = \sum_{j=0}^3 P_j^i(y) B_{j,3}(\frac{\mu - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}) \quad u \in [t_{i-1}, t_i], \\ z(u, v) = u \end{cases} \quad (4)$$

交线 Γ 的求法: 在 oxy 面上取样条插值曲线 Γ_{xy} 上点 (x_0, y_0) , 代入 (4) 式的第 1, 2 式求出参数 u_0, v_0 , 将 u_0, v_0 代入曲面 Σ 的方程 $R(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, 得到插值曲线 Γ 上的点 $R(u_0, v_0)$.

若曲面 Σ 的方程为 $F(x, y, z) = 0$, 则交线 Γ 为插值柱面上的曲线:

$$F(\sum_{j=0}^3 P_j^i(x) B_{j,3}(\frac{\mu - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}), \sum_{j=0}^3 P_j^i(y) B_{j,3}(\frac{\mu - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}), \mu) = 0. \quad (5)$$

交线 Γ 的求法: 在 oxy 面上取样条插值曲线 Γ_{xy} 上点 (x_0, y_0) , 代入 $F(x, y, z) = 0$, 解得 $z = z_0$, 则点 (x_0, y_0, z_0) 为插值曲线 Γ 上的点.

定理 3 插值曲线 Γ 是 G^1 的且在插值点处的单位切向量为 $T_i^\Sigma (i = 0, 1, \dots, n)$.

证明 显然 Γ 过插值点 $P_i^\Sigma (i = 0, 1, \dots, n)$. 现只要证明插值曲线 Γ 在结点 $t_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 的切向量为 T_i^Σ .

当 $0 < i \leq n$ 时, 在坐标面 oxy 上, 曲线 Γ_{xy} 的曲线段 $P_i^3(u)$ 的端点处的单位切向量分别为 T_{i-1} 和 T_i , 曲线段 $P_i^3(u)$ 与 $P_{i+1}^3(u)$ 在端点处相切于 T_i . T_i 提升到曲面 Σ 上为 T_i^Σ (该提升是在 Γ_{xy} 在 P_i 处的切线关于 oxy 面的投影柱面上进行的). 因此, T_i^Σ 位于插值柱面 Σ_{xy} 在 P_i^Σ 处的切平面上, 而 T_i^Σ 又位于曲面 Σ 在 P_i^Σ 处的切平面上.

Γ 是插值柱面 Σ_{xy} 与曲面 Σ 的交线, 所以 Γ 在 P_i^Σ 处的切线是曲面 Σ 在 P_i^Σ 处的切平面 π 与插值柱面 Σ_{xy} 在 P_i^Σ 处的切平面 π_{xy} 的交线. 因此 Γ 在 P_i^Σ 处的切线平行于 T_i^Σ , 即 P_i^Σ 在插值点 P_i^Σ 处的单位切向量为 T_i^Σ .

5 算法与实例

算法步骤如下:

STEP 1 将曲面上的插值点列和单位切向量投影到坐标面 oxy 得到 $n+1$ 个点 $P_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 和 $n+1$ 个单位向量 T_i (将投影向量单位化);

STEP 2 利用 3 中的方法构造 oxy 面上的 G^1 样条插值曲线 Γ_{xy} ;

STEP 3 构造曲线 Γ_{xy} 关于坐标面 oxy 的插值柱面为 Σ_{xy} ;

STEP 4 求曲面 Σ 和插值柱面 Σ_{xy} 的交线 Γ (利用第 4 节中的方法求交线 Γ , 不需要用一般曲面求交的方法, 这也是该算法的优点之一).

图 3 所示曲面是 $z = 9 - x^2 - y^2$, 插值数据点为 $(-1.000, 1.000, 7.000), (0.000, 0.000, 9.000), (1.000, 1.000, 7.000)$,

(2.000, 2.000, 1.000), 相应的切向量分别为(0.250, 0.400, -0.300), (0.750, 0.000, 0.000), (0.450, 0.105, -1.110), (0.750, 0.750, -6.000).

图4所示是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 插值数据点(均在上半平面)为(-1.00, -1.00, 1.414), (0.000, 0.000, 2.000), (1.000, 1.000, 1.414), (0.000, 1.500, 1.323), (-1.00, 1.00, 1.414), 相应的切向量分别为(0.250, 0.500, +0.530), (1.000, 0.000, 0.000), (0.000, 1.000, 0.710), (1.000, 0.000, 0.000), (-0.250, -0.250, 0.000).

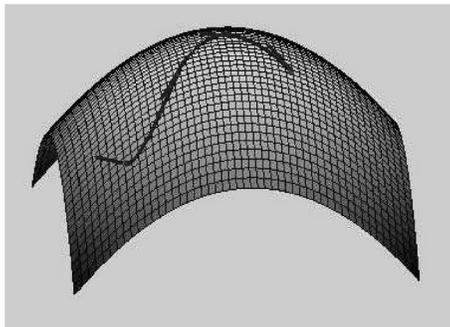


图3 曲面 $z = 9 - x^2 - y^2$ 上的插值曲线

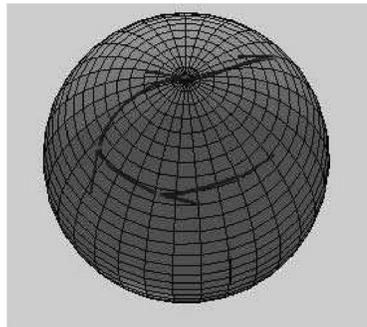


图4 半球面上的插值曲线

遗憾的是,文中的方法不适合封闭曲面上任意数据点的情形.笔者下一步的工作是讨论如何用投影柱面的方法解决封闭曲面上点列的插值问题.

参考文献:

- [1] 张怀. 限制在光滑表面上的 C^1 曲线插值方法 [J]. 计算机辅助几何设计与图形学学报, 1997, 9(5): 385-390.
- [2] 孙越泓. 常见 NURBS 表面上的 C^2 曲线插值法 [J]. 南京航空航天大学学报, 2001, 33(5): 486-489.
- [3] 简宏伟, 王国瑾. 光滑表面上的 G^1 插值曲线 [J]. 计算机辅助几何设计与图形学学报, 2003, 15(5): 541-546.
- [4] WANG Xiaoping, ZHOU Ru-rong, YU Zhan-yue, et al. Interpolation and Blending on Parametric Surfaces [J]. Journal of Surface, 2004, 15(3): 451-460.
- [5] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.

G^1 Continuous Interpolation Curve on Smooth Surface

SU Guo-rong, YANG Song-lin

(Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006, China)

Abstract: In computer aided geometric design, an interpolation curve restricted on a given smooth surface is a new research aspect. The main solution is to transfer to the common curve interpolation based on the relation between the surface and its parameter domain. A new and practical method is introduced in this paper. The basic idea is as follows: at first the given data points and tangent vectors on the surface are projected to a plane, then construct a spline curve interpolating the projected data points on the plane. The intersect curve of the surface and the projecting cylinder of the spline curve is the G^1 continuous interpolation curve.

Key words: Bézier curve; interpolating curve; spline curve; G^1 continuity

(责任编辑 向阳洁)