第 29 卷 第 4 期 吉首大学学报(自然科学版) Vol. 29 No. 4
2008 年 7 月 Journal of Jishou University (Natural Science Edition) Jul. 2008

文章编号: 1007- 2985(2008)04- 0014- 04

二元 Birkhoff 插值泛函组适定性问题*

崔利宏, 杨 爽
(辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连 116029)

摘 要: 主要研究了二元 Birkhoff 插值泛函组适定性问题. 在过去已得到的构造适定二元切触插值泛函组的基础上, 给出了构造二元 Birkhoff 插值适定泛函组的一种新的构造方法——添加平面代数曲线法. 该方法是通过迭加过程来实现的.

关键词: 二元 Birkhoff 插值; 适定泛函组; 平面代数曲线
中图分类号: O241.3 文献标识码: A

1 相关定义

Birkhoff 插值是切触插值的一般情形, 也是切触插值的一个更高层次. 随着近年来插值理论的发展, Birkhoff 插值在解决许多实际问题中发挥了重大作用, 因此 Birkhoff 插值的理论及方法的研究便成为当今许多专家学者关注的一个领域. 而已有的二元切触插值的某些理论及方法, 又给二元 Birkhoff 插值的进一步研究提供了许多依据. 笔者通过对二元二次 Birkhoff 插值空间使用一种迭加方法——添加代数曲线法, 对构造适定的二元 Birkhoff 插值空间泛函组问题作了进一步研究.

定义 1[1] 一个多元 Birkhoff 插值格式($\boldsymbol{E}, P_s$) 由如下 3 个部分构成:

(1) 一个结点集 $Z = \{z_q\}_{q=1}^m = \{(x_{q,1}, \cdots, x_{q,d})\}_{q=1}^m$;

(2) 一个插值空间 $P_s = \{p \mid p(z) = p(x_1, \cdots, x_d) = \sum_{i \in S} a_i x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}\}$, 其中 S 是 N_0^d 的一个低子集(一个 N_0^d 的子集称为一个低集, 如果 $0 \leqslant j_k \leqslant i_k$, $k = 1, \cdots, d$ 及 $i \in S$ 蕴涵 $j \in S$);

(3) 一个关联矩阵 $\boldsymbol{E}$(实际上是一个 $d+1$ 维数组) $= (e_{q,\alpha})$, $q = 1, \cdots, m$, $\alpha \in S$, 其中 $e_{q,\alpha} = 0$ 或 1.

Birkhoff 插值问题的实质就是对任意给定的实数组 $c_{q,\alpha}$(对于 q, α 应有 $e_{q,\alpha} = 1$), 去寻找一个多项式 $p \in P_s$, 使之满足插值条件 $\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} p(z_q) = c_{q,\alpha}$.

多元 Birkhoff 插值问题 给定一个实数集

$$\{f_A^{(i)} \in \mathbf{R} \mid A \in A_i, i = 0, 1, \cdots, t\}, \tag{1}$$

去寻找一个多项式 $p \in P_n^{(s)}$, 使得

$$D_A(Q_i)p = f_A^{(i)} \qquad A \in A_i, i = 0, 1, \cdots, t. \tag{2}$$

满足(2) 式的多项式 p 被称之为 Birkhoff 插值多项式, 而集合 $\Theta = \{D_A(Q_i) \mid A \in A_i, i = 0, 1, \cdots, t\}$ 被称之为关于 $P_n^{(s)}$ 的一个 Birkhoff 插值泛函组.

定义 2[1] 如果存在唯一一个多项式 $p \in P_n^{(s)}$ 满足(2) 式, 那么称 Birkhoff 插值问题(1)(2) 为适定

* 收稿日期: 2007- 12- 17
作者简介: 崔利宏(1964-), 男, 黑龙江绥滨人, 辽宁师范大学数学学院教授, 博士研究生, 主要从事多元逼近与计算机辅助几何设计研究.

Birkhoff 插值问题, 并且称 Θ 是关于 $P_n^{(s)}$ 的一个 Birkhoff 插值适定泛函组.

沿平面代数曲线的 Birkhoff 插值问题: 设 k 为正整数, r 为非负整数, 定义[2]

$$d_{n,\mu}(k)=\begin{pmatrix}n+2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}n-(\mu+1)k+2\\2\end{pmatrix}=\begin{cases}(n+1)(n+2)/2 & n<(\mu+1)k,\\ k(\mu+1)[2n+3-(\mu+1)k]/2 & n>(\mu+1)k,\end{cases}$$

其中 $e_{n.r}(k)=(n-rk)k-\begin{pmatrix}k-1\\2\end{pmatrix}+1$.

设 $q(x,y)=0$ 为平面上一条 k 次无重复分量代数曲线, $B=\{Q_i^{(r)}\mid i=1,\cdots,e_{n.r}(k);r=0,\cdots,\mu\}$ 为该曲线上的一个 Birkhoff 插值泛函组. 对于每一个任意给定的数组 $\{f_i^{(r)}\mid i=1,\cdots,e_{n.r}(k);r=0,\cdots,\mu\}$, 寻找一个多项式 $p(x,y)\in P_n^{(2)}$, 使之满足如下插值条件:

$$\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}p(Q_i^{(r)})=f_i^{(r)}\qquad i=1,\cdots,e_{n.r}(k);r=0,\cdots,\mu,\tag{3}$$

其中 $\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}p(Q_i^{(r)})$ 表示在 $p(x,y)$ 曲线 $q(x,y)=0$ 上泛函组 B 中点 $Q_i(i=1,\cdots,e_{n.r}(k))$ 处沿该曲线的 r 阶法向导数.

定义 3[1] 如果对于每一个任意给定的数组 $\{f_i^{(r)}\mid i=1,\cdots,e_{n.r}(k);r=0,\cdots,\mu\}$, 方程组(3) 总存在 1 组解, 那么称 $B=\{Q_i^{(r)}\mid i=1,\cdots,e_{n.r}(k);r=0,\cdots,\mu\}$ 为沿 k 次代数曲线 $q(x,y)=0$ 的一个 n 次 r 阶 Birkhoff 插值适定泛函组, 并简记为 $B\in I_{n.r}^{(2)}(q)$ (这里 $I_{n.r}^{(2)}(q)$ 代表位于曲线 $q(x,y)=0$ 上的所有 n 次 r 阶 Birkhoff 插值适定泛函组的集合).

注 1 以下 2 个命题等价[3]:

(1) 如果对于任给的数组 $\{f_i^{(r)}\mid r=0,1;i=1,\cdots,e_{n.r}(k)\}$, 方程 $\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}p(Q_i^{(r)})=f_i^{(r)}(r=0,1;i=1,\cdots,e_{n.r}(k))$ 总存在唯一解.

(2) 如果存在一个多项式 $p(x,y)\in P_n^{(2)}$, 满足齐次 Birkhoff 插值条件 $\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}p(Q_i^{(r)})=0(r=0,1;i=1,\cdots,e_{n.r}(k))$ 蕴含沿曲线 $q(x,y)=0$, 恒有 $p(x,y)=0$.

2 定理及其证明

定理 1[4] 假设 $\Theta=\{D_A(Q_i)\mid A\in A_i,i=0,\cdots,t\}$ 是关于 $P_2^{(2)}$ 的一个 Birkhoff 插值适定泛函组, 而 $B=\{Q_i^{(r)}\mid r=0,1;i=0,\cdots,e_{2.r}(k)\}\in I_{2+2k.r}^{(2)}(q)$, 且 $\Theta\cap B=\varnothing$, 则 $\Theta\cup B$ 必定构成关于 $P_{2+2k}^{(2)}$ 的一个 Birkhoff 插值适定泛函组(当 $r=0,k=1$ 时, $\Theta\cup B$ 必定构成关于 $P_3^{(2)}$ 的一个 Birkhoff 插值适定泛函组).

为了证明定理 1, 需要如下引理:

引理 1[1] 假设 $B=\{Q_i^{(r)}\mid r=0,1;i=1,\cdots,e_{n.r}(k)\}$ 是位于 k 次无重复分量代数曲线 $q(x,y)=0$ 上的一个 Birkhoff 插值泛函组, 则 B 能够做成沿 $q(x,y)=0$ 的 n 次 1 阶 Birkhoff 插值适定泛函组的充要条件是: 对任何一个满足齐次 Birkhoff 插值条件 $\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}p(Q_i^{(r)})=0(r=0,1;i=1,\cdots,e_{n.r}(k))$ 的多项式 $p(x,y)\in P_n^{(2)}$, 一定能够表示成分解 $p(x,y)=[q(x,y)]^2r_1(x,y)$, 其中 $r_1(x,y)\in P_{n-2k}^{(2)}$.

证明 由注 1 充分性显然. 下面只须证明必要性.

由于 $B=\{Q_i^{(r)}\mid r=0,1;i=1,\cdots,e_{n.r}(k)\}\in I_{n.r}^{(2)}(q)$, 并且存在多项式 $p(x,y)\in P_n^{(2)}$ 满足齐次 Birkhoff 插值条件 $\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}p(Q_i^{(r)})=0(r=0,1;i=1,\cdots,e_{n.r}(k))$, 因此当 $r=0$ 时, $B=\{Q_i^{(0)}\mid r=0;i=1,\cdots,e_{0.r}(k)\}\in I_{n.0}^{(2)}(q)$. 由注 1, 沿曲线 $q(x,y)=0$ 恒有 $p(x,y)=0$, 也就是说, 曲线 $p(x,y)=0$ 与 $q(x,y)=0$ 的每一个因子都交于无穷多个点, 但 $q(x,y)=0$ 为无重复分量的, 则有 $p(x,y)=q(x,y)\cdot r(x,y)$.

下证 $r=1$ 时成立.

对 $p(x,y)=[q(x,y)]^2 r(x,y)$ 两端求1阶导数($\forall Q_i^{(1)}\in B$),并使用Leibniz微分公式[5],得 $r(Q_i^{(1)})=0,i=1,\cdots,e_{n,1}(k)$. 但是 $B\in I_{n,1}^{(2)}(q)$,并且 $e_{n,1}(k)=(2-k)-\frac{(k-2)(k-1)}{2}+1$,这意味着一个 $n-k$ 次代数曲线 $r(x,y)=0$ 与另一个 k 次曲线 $q(x,y)=0$ 相交于 $(n-k)-\frac{(k-2)(k-1)}{2}+1$ 个相异点.

由Cayley-Bacharach定理[6]知,它们必相交于余下的 $\frac{(k-2)(k-1)}{2}$ 个点,即相交于 $(n-k)k+1$ 个交点.

由Bezout定理[7]知,$r(x,y)=q(x,y)r_1(x,y)$,所以 $p(x,y)=[q(x,y)]^2 r_1(x,y)$. 必要性得证.

定理1的证明　全部的条件数为

$$\dim P_2^{(2)}+\sum_{r=0}^{1}e_{2+2k,r}(k)=\begin{pmatrix}2+2\\2\end{pmatrix}+\sum_{r=0}^{1}[(2+2k-rk)k-\begin{pmatrix}k-1\\2\end{pmatrix}+1]=2k^2+7k+6.$$

而 $\dim P_{2+2k}^{(2)}=\begin{pmatrix}2+2k+2\\2\end{pmatrix}=2k^2+7k+6$,即全部条件数准确地等于多项式空间 $P_{2+2k}^{(2)}$ 的维数.

由注1可知,只需证明仅存在零多项式满足所给的齐次Birkhoff插值条件即可.

假定存在多项式 $p(x,y)\in P_{2+2k}^{(2)}$ 满足如下齐次Birkhoff插值条件:

$$\begin{aligned}&(D_A p)(Q_i)=0 \qquad \forall Q_i\in \mathbf{N},\\&\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}p(Q_i^{(r)})=0 \qquad \forall Q_i^{(r)}\in B.\end{aligned}\tag{4}$$

由(4)式和 $B\in I_{2+2k,r}^{(2)}(q)$,而 $p(x,y)\in P_{2+2k}^{(2)}$,由引理1知,存在一个多项式 $r(x,y)\in P_2^{(2)}$,使得

$$p(x,y)=[q(x,y)]^2 r(x,y).\tag{5}$$

对(5)式两端求2阶导数,得 $0=(D_A p)(Q_i)=D_A([q(x,y)]^2 r(x,y))(Q_i),\forall Q_i\in\mathbf{N}$.

使用Leibniz微分公式有 $(D_A r)(Q_i)=0,\forall Q_i\in\mathbf{N}$.

但是 Θ 是关于 $P_2^{(2)}$ 的Birkhoff插值适定泛函组,故由注1,有 $r(x,y)=0$.

由 $p(x,y)=[q(x,y)]^2 r(x,y)$ 可知 $p(x,y)=0$,则 $\Theta\cup B$ 必定构成关于 $P_{2+2k}^{(2)}$ 的一个Birkhoff插值适定泛函组.

3　定理的举例

例1　设 $\Theta_1=\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1),(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})\}$ 为单位圆周 $x^2+y^2-1=0$ 上的点, $\Theta_2=\{(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2})\}$ 为点 $(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})$ 的方向导数,令 $\Theta=\Theta_1\cup\Theta_2$ 为单位圆周 $x^2+y^2-1=0$ 上的Birkhoff插值适定泛函组. $B=\{(-1,1),(0,0),(1,-1)(2,-2)\}\in I_{3,0}^{(2)}(x+y=0)$,且 $\Theta\cap B=\varnothing$,则由定理1可知 $\Theta\cup B$ 可构成关于 $P_3^{(2)}$ 的一个Birkhoff插值适定泛函组.

事实上,设

$$p(x,y)=a_1x^3+a_2x^2y+a_3xy^2+a_4y^3+a_5x^2+a_6xy+a_7y^2+a_8x+a_9y+a_{10},\tag{6}$$

则

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\sin\alpha.\tag{7}$$

$(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})$ 的方向导数为 $(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2})$,即 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt2}{2},\sin\alpha=-\frac{\sqrt2}{2}$. 将上述条件代入(7)式,将点代入(6)式,得到以 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}$ 为未知量的齐次线性方程组,令其系数行列式为 $\det(\boldsymbol{A})$.

由 $\det(\boldsymbol{A})=576\neq0$ 可知,给定任意一个 $\{f(x_i,y_i)\mid i=1,\cdots,10\}$,都存在唯一的多项式 $p(x,y)$ 满

足题中条件, 即所给插值泛函组为 Birkhoff 插值适定泛函组.

若被插函数为 $f(x, y) = 2^{x+y}$, 则确定的二元三次多项式为

$$
\begin{aligned}
p(x, y) = {} & 0.0843x^3 + 0.2321x^2y + 0.2321xy^2 + \\
& 0.0843y^3 + 0.2500x^2 + 0.2500y^2 + \\
& 0.5000xy + 0.6657x + \\
& 0.6657y + 1.0000.
\end{aligned}
$$

其图像如图 1 所示.

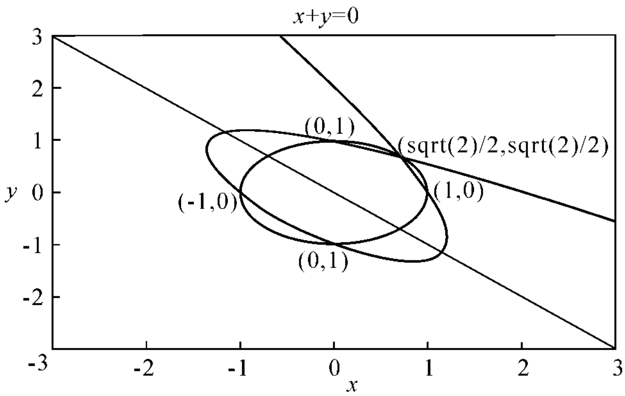

图 1　单元圆的二元 Birkhoff 插值

参考文献:

[1]　崔利宏. 多元切触插值某些问题的研究 [D]. 大连: 大连理工大学应用数学系, 2006.

[2]　LIANG Xue-zhang, LI Lue-qing. On Bivariate Osculatory Interpolation [J]. Jonrnal of Computer and Applied Mathematics, 1991, 38: 271-282.

[3]　BORISLAR BOJANOV, XU Yuan. On Polynomial Interpolation of Two Variables [J]. Journal of Approximation Theory, 2003, 120: 267-282.

[4]　LORENTZ R A. Multivariate Birkhoff Interpolation [M]. Number 1 516 in Lecture Notes in Mathematics. Berlin Heidelberg: Springe Verlag, 1992.

[5]　RUBIO J, DIAZ-BARRERO J L, RUBIO P. On the Solvability of the Birkhoff Interpolation Problem [J]. Journal of Approximation Theory, 2003, 124: 109-114.

[6]　WALKER R J. Algebraic Curves [M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1950.

[7]　梁学章, 李　强. 多元逼近 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.

Properly Posed Set of Functionals for Bivariate Birkhoff Interpolation

CUI Li-hong, YANG Shuang

(School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, Liaoning China)

Abstract: This paper mainly deals with the properly posed set of functionals for bivariate Birkhoff interpolation. By means of the theory and method of constructing the properly posed set of functionals for bivariate osculatory interpolation, the paper gives a new constructive method of properly posed sets of functionals in bivariate Birkhoff interpolation: plane algebraic curve superpositon process. Which is realized by superimposition.

Key words: bivariate Birkhoff interpolation; properly posed sets of functionals; plane algebraic curve

(责任编辑　向阳洁)