云南大学学报(自然科学版), 2003, 25(5): 386~390　CN 53-1045/N　ISSN 0258-7971
Journal of Yunnan University

完全离散二项风险模型下有限时间内的生存概率问题*

乔克林, 李晋枝, 何树红
(云南大学 数学系, 云南 昆明　650091)

摘要: 应用分析方法研究了保险公司在完全离散复合二项风险模型下的生存概率问题, 得到了生存到固定时刻 n 及在时刻 n 恰好发生了 k 次赔付且盈余为某数 $x(x\geqslant 0)$ 的概率公式; 并由此得到有限时间内的生存概率公式.

关键词: 复合二项风险模型; 破产概率; 生存概率; 母函数
中图分类号: O 211.67　文献标识码: A　文章编号: 0258-7971(2003)05-0386-05

经典风险理论, 主要处理保险事务中的随机风险模型, 研究在有限时间内的生存概率、破产概率以及最终破产等问题. 关于这方面的研究, 研究得较多的是连续时间模型. Feller, Gerbert 和 Gordon E. Willmot 将随机过程的理论与方法应用于这一研究, 取得了许多较好的结果[1,2]. 对离散时间模型的研究较少[3], 且大都停留在完全离散的复合二项风险模型上. 在此模型下, Gordon E. Willmot[4] 研究了有限时间内的生存概率. 成世学和伍彪[5] 研究了生存到固定时刻 n, 并且在此时刻 n 的盈余为某数 $x(x\geqslant 0)$ 的概率. 在假定 $c=1$(c 为单位时间内收取的保费) 时, 龚日朝、杨向群[6] 研究了生存到固定时刻 n, 在此时刻 n 恰好发生第 k 次赔付而且在此时刻 n 的盈余为某数 $x(x\geqslant 0)$ 概率公式. 在保险公司的实务中, 更关心到某时刻为止发生赔付的总次数, 因此, 在一定的假设条件下, 假定 c 取任意正整数, 本文得到了生存到固定时刻 n, 在此时刻 n 为止恰好发生了 k 次赔付而且在此时刻 n 的盈余为某数 $x(x\geqslant 0)$ 的概率公式.

1　复合二项风险模型的定义与实际背景

定义1　设 $u\in Z=\{0,1,2,3,\cdots\}$, $c\in Z^{+}\equiv\{1,2,3,\cdots\}$, 给定在某概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},p)$ 上的:

(1) 取值于 Z^{+} 的独立同分布随机变量 Y_i, $i=1,2\cdots$, 其分布为: $P\{Y=j\}=p_j$, $j=1,2,\cdots$.

(2) 具有参数 p 的二项随机序列 $N\equiv\{N(n)\}_{n=0}^{\infty}$, $p\in(0,1)$. 即 N 具有零初值、平稳独立增量性, 且具有参数为 p, 项数为 n 的二项分布 $B(n,p)$. 如果 $N\equiv\{N(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 与 $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 相互独立, 令

$$U(n)=u+cn-\sum_{i=1}^{N(n)}Y_i,\ n=0,1,2,\cdots,\tag{1}$$

则称(1) 为完全离散复合二项风险模型. 记为 $\{U(n)\}_{n=0}^{\infty}$.

模型的实际背景:

在保险公司的事务中, 我们假定:

(1) 只在离散时刻 n 进行至多一次赔付并收取保费, 在连续时间段 $(n-1,n]$ 中进行的赔付以及收取的保费均视为在时刻 n 进行的.

(2) 保险公司在时刻 $n=0$ 时有初始资本 $u(u\geqslant 0)$, 公司的唯一收入是获取保费收入, 假定单位时间的收入为 c 元.

(3) 保险公司仅有的支出是投保人发生事故后, 公司对其的赔付, 我们假定:

(i) 公司在时刻 n 进行赔付的次数 ξ_n 有二点分布:

$P\{\xi_n=1\}=p$, $P\{\xi_n=0\}=q$, $\forall n=1,2,\cdots$,

其中, $p+q=1$, $0<p<1$, $N(n)$ 为时刻 n 为止

* 收稿日期: 2003-04-26
基金项目: 云南省金融数学省院省校合作项目.
作者简介: 乔克林(1964-　), 男, 延安大学讲师, 云南大学在读硕士, 主要从事金融数学的理论与应用研究.

赔付的总次数, 即

$$N(0)=0,\ N(n)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\ \forall n=1,2,\cdots.$$

在实际中$\{\xi_n: n=1,2,\cdots\}$相互独立, 因而易证 $N\equiv\{U(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 是参数取 p 的二项随机序列, 证明见文献[7].

(ii) 第 i 次的赔付量为 Y_i, 而且$\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为取正值的独立同分布随机变量序列, 于是到时刻 n 为止的总赔付量 $S(n)\equiv\sum_{i=1}^{N(n)}Y_i$, 约定 $S(n)=0$, 若 $N(n)=0$. 进一步假定 $E(Y)=\mu<+\infty$, $E[S(n)]<cn$.

(4) 在实际中, 我们假定 $N=\{U(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $Y=\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 独立.

根据以上假设, 记保险公司在时刻 n 的盈余资本为 $U(n)$, 则

$$U(n)=u+cn-s(n),\quad \forall n=0,1,2,\cdots$$

这样, 保险公司的盈余过程为$\{U(n)\}_{n=0}^{\infty}$.

对于$\{U(n)\}_{n=0}^{\infty}$, 保险公司关心的重要问题之一是: 到某一时刻为止生存的概率或者破产的概率. 这里, 所谓破产定义为盈余资本为负, 盈余为负的最小时刻我们定义为破产时, 即

$$\tau\equiv\min(n\in Z^+,\ U(n)<0). \tag{2}$$

我们采用如下几个记号

$$\Phi^{(k)}(u,n,x)\equiv P^u\{U(n)=x,\ T_n=k,\ \tau>n\} \tag{3}$$

表示生存到固定时刻 n, 在此时刻 n 为止恰好发生了 k 次赔付而且在此时刻 n 的盈余为某数 $x\,(x\geqslant 0)$ 的概率.

$$\Phi(u,n,x)\equiv p^u\{U(n)=x,\ \tau>n\} \tag{4}$$

表示生存到固定时刻 n, 在此时刻 n 的盈余为某数 $x\,(x\geqslant 0)$ 的概率.

$$\Phi(u,n)\equiv p^u\{\tau>n\} \tag{5}$$

表示生存到固定时刻 n 的概率.

其中: T_n 表示到时刻 n 为止赔付的总次数, 本文中记 $p^u\{*\}\equiv p^u\{*\mid U(0)=u\}$.

2　几个引理

定义 2　给定 $u\in Z$, $c\in Z^+$, 设 X_i, $i=1,2,\cdots$ 是独立同分布的取值于 Z 的随机变量序列, 公共分布为 π, 且

$$P\equiv\pi((0,+\infty))=P\{X_i>0\}>0,$$ 令

$$U^*(n)=u+cn-\sum_{i=1}^{n}X_i,\ n=0,1,2,\cdots,$$

称$\{U^*(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 为 U^* – 型离散风险模型.

引理 1[7]　对于离散型风险模型$\{U(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 和$\{U^*(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 二者是等价的, 即二者可相互转化.

我们定义安全负荷系数 $\theta\equiv\frac{c-p\mu}{p\mu}>0$.

引理 2[6]　对于$\{U(n)\}_{n=0}^{\infty}$, 若 $\theta>0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}U(n)=+\infty$, $a.s.-P$.

引理 3[6]　$\{U(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个齐次 Markov 过程.

引理 4[8]　设 L 是复平面 C 上包围原点闭曲线, 复变量函数 $\varphi(z)$ 在曲线 L 及其内部解析, 记 $A\equiv\{t\in C: |t\varphi(z)|<|z|,\ \forall z\in L\}$, 则对任意的 $t\in A$, 有:

(i) 关于 ξ 的方程 $\xi=t\varphi(\xi)$ 在曲线 L 的内部有一解 $\xi=\xi(t)$.

(ii) 设复变函数 $f(z)$ 在 L 及其内部解析, 则

$$f(\xi(t))=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}s^{n-1}}\cdot[f'(s)\varphi^n(s)]\mid_{s=0}.$$

引理 5　设 $m,n\in Z$, 多项式$\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right)^n$ 的展开式中, x^m 的系数为

$$n!\sum_{j\in Q(n,m)}\prod_{i=0}^{m}\frac{a_i^{j_i}}{j_i!},$$

其中: $Q(n,m)\equiv\{j=(j_0,j_1,\cdots,j_m): \sum_{i=0}^{m}j_i=n,\ \sum_{i=0}^{m}ij_i=m,\ j_i\in Z,\ i=0,1,\cdots,m\}$.

证明　证明较易, 因篇幅所限, 故略.

3　生存概率

定理 1　对于$\{U(n)\}_{n=0}^{\infty}$, 若 $P(Y=ic)=p_i$, $\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$; $u=\bar{u}c$, $\bar{u}\in Z$. 则有:

(i) 若 x 不为 c 的整数倍, 则有:

$\Phi^{(k)}(u,n,x)=0$.

(ii) 若 x 为 c 的整数倍,

1) 当 $k=n$ 时,

$\Phi^{(n)}(u,n,x)=$

$$\begin{cases} n!p^n \sum\limits_{j \in Q(n, \bar{u}-x/c)} \prod\limits_{i=0}^{\bar{u}-x/c} \dfrac{p_i^{j_i}}{j_i!}, & x \leqslant u + cn \\ 0, & x > u + cn \end{cases}$$

2) 当 $k < n$ 时,

① 当 $x > u + cn$ 时, $\Phi^{(k)}(u, n, x) = 0$,

② 当 $x = u + cn$ 时,

$$\Phi^{(k)}(u, n, x) = \begin{cases} 1 & k = 0, \\ 0 & k > 0. \end{cases}$$

③ 当 $0 \leqslant x < u + cn$ 时,

$$\Phi^{(k)}(0, n, x) = \frac{n!(x/c+1)p^k q^{n-k}}{(n-k+1)!} \cdot \sum_{\substack{j \in Q(n+1, n-x/c); \\ j_0 = n-k+1}} \prod_{i=1}^{n-x/c} \frac{p_i^{j_i}}{j_i!},$$

$$\Phi^{(k)}(u, n, x) =$$

$$n! \frac{q^{n-k}p^k}{(n-k)!} \sum_{\substack{j \in Q(n, \bar{u}+n-x/c); \\ j_0 = n-k}} \prod_{i=1}^{\bar{u}+n-x/c} \frac{p_i^{j_i}}{j_i!} -$$

$$q \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{k} \sum_{\substack{Q(n-1-l, \bar{u}+n-l); \\ j_0 = n-1-l-k+m}} \Phi^{(m)}(0, l, x) \cdot$$

$$\frac{q^{n-1-k-l+m}p^{k-m}}{(n-1-k-l+m)!} \prod_{i=1}^{\bar{u}+n-l} \frac{p_i^{j_i}}{j_i!}.$$

证明　根据假设, 结论 i) 显然成立. 下面证明 ii) 中的 1): 因为 $k = n$, 即每一时刻都发生赔付, 且 $P(Y = ic) = p_i$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. 即当赔付发生时, 赔付量为 c 的整数倍, 因此, 若 $x > u + cn$, 结论显然成立. 下面讨论 $0 \leqslant x \leqslant u$ 的情形.

将时刻 1 视为新模型 $\{U(n) \equiv U(n+1), n \in Z\}$ 的开始时刻, 则新模型有初始资本 $U(0) = u + c - Y_1$, 于是由引理 3, 运用模型的 Markov 性及定理的假设得

$$\Phi^{(n)}(u, n, x) = p \sum_{i=1}^{\bar{u}+1} \Phi^{(n-1)} \cdot (u + c - ic, n-1, x) p_i, \tag{6}$$

我们定义母函数

$$\widehat{\Phi}^{(n)}(zc, n, x) = \sum_{\bar{u}=0}^{\infty} \Phi^{(n)}(\bar{u}c, n, x) z^{\bar{u}}. \tag{7}$$

在(6) 式两端同乘 $z^{\bar{u}}$, 并关于 $\bar{u}$ 从 0 到 ∞ 求和, 得

$$\widehat{\Phi}^{(n)}(zc, n, x) = p\hat{P}(z) \widehat{\Phi}^{(n)}(zc, n-1, x),$$

其中 $\hat{P}(z) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i z^i$, $|z| < 1$.

由上式可以看出: $\{\widehat{\Phi}^{(n)}(zc, n, x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是关于 n 的等比数列, 公比为 $p\hat{P}(z)$, 首项为

$$\widehat{\Phi}^{(0)}(zc, 0, x) = z^x,$$

则通项为 $\widehat{\Phi}^{(n)}(zc, n, x) = p^n[\hat{P}(z)]^n z^x$.

应用引理 5, 结合(7) 式, 在上式两端比较 $z^{\bar{u}}$ 的系数, 即可得

$$\Phi^{(n)}(u, n, x) = n!p^n \sum_{j \in Q(n, \bar{u}-x/c)} \prod_{i=0}^{\bar{u}-x/c} \frac{p_i^{j_i}}{j_i!},$$

于是该命题得证.

在 ii), 2) 中, ①②结论是显然的, 下面证明 ii) 中的 ③.

同样, 将时刻 1 视为新模型 $\{U(n) = U(n+1), n \in Z\}$ 的开始时刻, 新模型有初始资本 $\bar{u}c + c - \sum\limits_{i=0}^{N(1)} Y_i$, 于是由引理 3, 运用模型 $\{U(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 的 Markov 性于时刻 1, 考虑赔付量的大小, 结合全概率公式, 得

$$\Phi^{(k)}(\bar{u}c, n, x) =$$
$$q\Phi^{(k)}(\bar{u}c + c, n-1, x) +$$
$$p \sum_{i=1}^{\bar{u}+1} \Phi^{(k-1)}(\bar{u}c + c - ic, n-1, x) p_i,$$

引进母函数

$$\hat{\Phi}^{(w)}(\bar{u}c, n, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^{(k)}(\bar{u}c, n, x) w^k, \quad |w| < 1. \tag{9}$$

在(8) 式的两端同乘 w^k, 并关于 k 从0到 ∞ 求和, 并且注意到

$$\Phi^{(0)}(\bar{u}c, n, x) = \Phi^{(0)}(\bar{u}c + c, n-1, x) = 0,$$

得

$$\hat{\Phi}^{(w)}(\bar{u}c, n, x) = q\hat{\Phi}^{(w)}(\bar{u}c + c, n-1, x) + pw \sum_{i=1}^{\bar{u}+1} \hat{\Phi}^{(w)}(\bar{u}c + c - ic, n-1, x) p_i. \tag{10}$$

定义

$$\hat{S}^{(w)}(zc, n, x) \equiv \sum_{\bar{u}=0}^{\infty} \hat{\Phi}^{(w)}(\bar{u}c, n, x) z^{\bar{u}}, \quad |z| < 1. \tag{11}$$

在(10) 式两端同乘 $z^{\bar{u}}$, 并关于 $\bar{u}$ 从 0 到 ∞ 求和, 得

$$z\hat{S}^{(w)}(zc, n, x) = \hat{g}(z, w) \hat{S}^{(w)}(zc, n-1, x) - q\hat{\Phi}^{(w)}(0, n-1, x), \tag{12}$$

其中 $\hat{g}(z,w)\equiv q+pw\sum_{i=1}^{\infty}p_i z^i$. 于是上式可看作是函数 $\mathbb{S}(zc,n,x)$ 关于 n 的差分方程.

定义

$$\hat{\Psi}^{(w)}(zc,t,x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{S}^{(w)}(zc,n,x)t^n,\ |t|<1. \tag{13}$$

$$\hat{\Psi}^{(w)}(0,t,x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\Phi}^{(w)}(0,n,t)t^n,\ |t|<1. \tag{14}$$

在方程(12) 两端同乘 t^n, 并关于 n 从 0 到 ∞ 求和, 可得

$$[z-\hat{g}(z,w)t]\hat{\Psi}^{(w)}(zc,t,x)=z\mathbb{S}^{(w)}(zc,0,x)-qt\hat{\Psi}^{(w)}(0,t,x),$$

而

$$\mathbb{S}^{(w)}(zc,0,x)=\sum_{\bar{u}=0}^{\infty}\hat{\Phi}^{(w)}(\bar{u}x,0,x)z^{\bar{u}}=z^{x/c},$$

则上式变成

$$[z-\hat{g}(z,w)t]\hat{\Psi}^{(w)}(zc,t,x)=z^{x/c+1}-qt\hat{\Psi}^{(w)}(0,t,x). \tag{15}$$

下面根据此式推导 $\hat{\Psi}^{(w)}(0,t,x)$.

根据引理 4, 取引理中的 $\varphi(z)=\hat{g}(z,w)$, $f(z)=z^{x/c+1}$, 可知在 $\{z:|z|<1\}$ 内方程: $z=t\hat{g}(z,w)$ 存在唯一解, $z=z(t,w)$ 并且

$$f(z(t,w))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}s^{n-1}}[f'(s)\varphi^n(s)']|_{s=0}$$

将 $\varphi(z)=\hat{g}(z,w)$, $f(z)=z^{x/c+1}$ 代入上式得

$$\begin{aligned}z^{x/c+1}&=(x/c+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}s^{n-1}}\cdot\\&\quad[s^{x/c}(q+pw\hat{p}(s))^n]|_{s=0}=\\&\quad(x/c+1)\sum_{n=x/c+1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}s^{n-1}}\cdot\\&\quad[s^{x/c}(q+pw\hat{p}(s))^n]|_{s=0}.\end{aligned}$$

根据引理 5, 可知多项式 $s^{x/c}(q+pw\hat{p}(s))^n$ 中 s^m 的系数, 记为

$$A(n,m-x/c,w)\equiv n!\sum_{j\in Q(n,m-x/c)}\prod_{i=0}^{m-x/c}\cdot\frac{p_i^{j_i}}{j_i!}q^{j_0}(pw)^{n-j_0}. \tag{16}$$

则(15) 式变为

$$z^{x/c+1}=(x/c+1)\sum_{n=x/c+1}^{\infty}\cdot\frac{A(n,n-1-x/c,w)}{n}t^n,$$

将上式及 $z=t\hat{g}(z,w)$ 代入(15) 式, 得

$$\hat{\Phi}^{(w)}(0,t,x)=q^{-1}(x/c+1)\sum_{n=x/c+1}^{\infty}\cdot\frac{A(n,n-1-x/c,w)}{n}t^{n-1}.$$

将上式代入(14) 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\Phi}^{(w)}(0,n,x)t^n=q^{-1}(x/c+1)\sum_{n=x/c+1}^{\infty}\frac{A(n,n-1-x/c,w)}{n}t^{n-1},$$

所以

$$\hat{\Phi}^{(w)}(0,n,x)=q^{-1}(x/c+1)\cdot\frac{A(n+1,n-x/c,w)}{n+1}.$$

将上式代入(9) 式, 并结合(16) 式得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Phi^{(k)}(0,n,x)w^k=q^{-1}(x/c+1)n!\sum_{j\in Q(n+1,n-x/c)}\prod_{i=0}^{n-x/c}\cdot\frac{p_i^{j_i}}{j_i!}q^{j_0}(pw)^{n+1-j_0},$$

比较两端 w^k 的系数知 $n+1-j_0=k$ 则可得在初始资本 $u=0$ 时的概率公式

$$\Phi^{(k)}(0,n,x)=\frac{n!(x/c+1)P^kq^{n-k}}{(n-k+1)!}\cdot\sum_{\substack{j\in Q(n+1,n-x/c)\\ j_0=n-k+1}}\prod_{i=1}^{n-x/c}\frac{p_i^{j_i}}{j_i!}.$$

下面推导初始资本 $u>0$ 情形下的概率公式, 由(15) 式得

$$\hat{\Psi}^{(w)}(zc,t,x)=\frac{2^{x/c}-z^{-1}qt\hat{\Psi}^{(w)}(0,t,x)}{1-z^{-1}\hat{g}(z,w)t},$$

将(14) 式带入上式, 然后展开成关于 t 的多项式, 并结合(13) 式, 比较两端 t^n 的系数, 得

$$z^n\mathbb{S}^{(w)}(zc,n,x)=z^{x/c}\hat{g}^n(z,w)-q\sum_{j=0}^{n-1}z^j\hat{g}^{n-1-j}(z,w)\cdot\hat{\Phi}^{(w)}(0,j,x),$$

将(11) 式代入上式, 并比较两端 $z^{\bar{u}+n}$ 的系数, 得

$$\hat{\Phi}^{(w)}(\bar{u}c,n,x)=A(n,\bar{u}+n-x/c,w)-q\sum_{l=0}^{n-1}\hat{\Phi}^{(w)}(0,l,x)\cdot A(n-1-l,\bar{u}+n-l,w).$$

将(9) 式代入上式并比较两端 w^k 的系数, 便得出了所要证明的结论.

根据上述定理,我们很容易得出下述推论.

推论　对于$\{U(n)\}_{n=0}^{\infty}$在上述定理假设条件下有:

(1) $\Phi(u,n,x)=\sum_{k=0}^{n}\Phi^{(k)}(u,n,x)$,

(2) $\Phi(u,n)=\sum_{x=0}^{u+cn}\sum_{k=0}^{n}\Phi^{(k)}(u,n,x)$.

参考文献:

[1] FELLER W. An introduction to probability and its applications[M]. 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, 1971.

[2] GERBER H U. 数学风险论导论[M]. 成世学, 严颖译. 北京: 世界图书出版社, 1979.

[3] 乔克林, 李晋枝, 何树红. 复合二项风险模型的破产概率[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2002, 24(5): 328—330.

[4] WILLMOT G E. Ruin probability in the compound binominal model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1993, 12: 67—74.

[5] CHENG Shi-xue, WU Biao. The survival probability in finite time period in fully discrete risk model[J]. Apple Math-JCU, 1999, 14B: 67—74.

[6] 龚日朝, 扬向群. 完全散离二项风险模型的生存概率[J]. 统计与精算, 2002, (1): 50—56.

[7] 柳向东. 俩类散离风险模型的等价性[D]. 长沙: 湖南师范大学, 1999.

[8] WHITTACKER E, WASTOM G. Acourse of modern analysis[M]. 4th ed. London: Cambridge University Press, 1927.

The survival probablities in finite time period in fully discrete binomial risk model

QIAO Ke-lin, LI Jin-zhi, HE Shu-hong

(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: Applying analytic method, the survival probabilities in finite time period in fully discrete binomial risk model are researched for insurance firm. The formula of surviving until the finite time n and just taking place k times payments and gaining $x\,(x\geqslant 0)$ on that time are got. The formula of the survival probability in finite time period also are got for that reason.

Key words: compound binomial risk model; ruin probability; survival probability; original function

MSC(2000): 62P05