云南大学学报（自然科学版），2004，26（4）：279~283　　CN 53-1045/N　ISSN 0258-7971
Journal of Yunnan University

渐近拟非扩展型映象不动点的迭代逼近*

王绍荣[1,2]，左国超[3]

（1.大理学院 数学系,云南 大理　671000;2.云南大学 云南省应用数学研究所,云南 昆明　650091;
3.大理学院 计算机科学系,云南 大理　671000）

摘要：去掉了已有文献中的条件:“对任意子列$\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$,当$\|T^{n_i}x_{n_i}-x_{n_i}\|\to 0$时就有$\|Tx_{n_i}-x_{n_i}\|\to 0$”后,研究了Banach空间中渐近拟非扩展型映象不动点的迭代逼近问题;所得结果推广和发展了已有文献中的成果.

关键词:渐近拟非扩展型映象;修改的具误差的Ishikawa迭代序列;不动点
中图分类号:O 177.91　　文献标识码:A　　文章编号:0258-7971(2004)04-0279-05

1　预备知识

本文中处处设E是实的Banach空间.

定义1　设D是E的非空集,$T:D\to D$是一映象,$F(T)$是T的不动点集.

(1) T称为渐近非扩展的[1],如果存在一数列$\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,使得

$$\|T^nx-T^ny\|\leqslant k_n\|x-y\|,\quad \forall x,y\in D,\ \forall n\geqslant 1. \tag{1}$$

(2) T称为渐近非扩展型的[2],如果

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sup_{x,y\in D}\|T^nx-T^ny\|-\|x-y\|\right\}\leqslant 0. \tag{2}$$

(3) T称为渐近拟非扩展型的,如果

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sup_{x\in D,\,q\in F(T)}\|T^nx-q\|-\|x-q\|\right\}\leqslant 0. \tag{3}$$

(4) T称为一致L-Lipschitzian的,其中L是一正常数,如果

$$\|T^nx-T^ny\|\leqslant L\|x-y\|,\quad (\forall x,y\in D,\ \forall n\geqslant 1). \tag{4}$$

由定义不难看出:若T是具数列$\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$的渐近非扩展映象,则$T$是渐近非扩展型的一致L-Lipschitzian映象,其中$L\geqslant\sup\{k_n:n\geqslant 1\}<\infty$.渐近非扩展映象,渐近非扩展型映象都是特殊的渐近拟非扩展型映象.

定义2　设D是E的非空闭凸集,D称为E的收缩核,如果存在一连续映象$Q:E\xrightarrow{\text{onto}}D$,使得:$Qx=x$,$\forall x\in D$.映象$Q$称为由$E$到$D$的保核收缩.

定义3　设D是E的非空闭凸集,$T:D\to D$是一映象,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$是$[0,1]$中的2个数列,$Q:E\xrightarrow{\text{onto}}D$是一非扩张的保核收缩.$\{u_n\}$,$\{v_n\}$是$E$中满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|<\infty,\ 且\ \sum_{n=1}^{\infty}\|v_n\|<\infty \tag{5}$$

的2序列,则

(1) 由下式定义的序列$\{x_n\}\subset D$

$$\begin{cases}x_0\in D,\\ x_{n+1}=Qp_n,\\ p_n=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nT^nQy_n+u_n,\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nT^nx_n+v_n\end{cases} \tag{6}$$

称为修正的具误差的Ishikawa迭代序列;

(2) 由下式定义的序列$\{x_n\}\subset D$

* 收稿日期:2003-07-30
基金项目:云南省教育厅基金资助项目(0111179);大理学院科研资金资助项目(2002X42).
作者简介:王绍荣(1958-　),男,云南人,副教授,主要从事非线性泛函分析的研究.该文是作者在云南省应用数学研究所访问期间完成的.

$$\begin{cases} x_0 \in D, \\ x_{n+1} = Qp_n, \\ p_n = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T^n x_n + u_n \end{cases} \tag{7}$$

称为修正的具误差的 Mann 迭代序列;

(3) 特别:如果 $u_n = v_n = \theta$, $\forall n \geqslant 0$, 则由(6)和(7)所定义的序列 $\{x_n\} \subset D$ 分别称为修正的 Ishikawa 迭代序列和修正的 Mann 迭代序列.

下面的 3 个引理在证明本文的主要结果中起到重要作用.

引理 1 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是非负数列, 且 $\exists N_0 \in N$, $\forall n \geqslant N_0$ 有

$$a_{n+1} \leqslant a_n + b_n \tag{8}$$

成立. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在.

引理 2[3] 设 E 是一个 $p(p>1)$ 一致凸的 Banach 空间, 则存在常数 $c_p > 0$, 使得

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p \leqslant \lambda\|x\|^p + (1-\lambda)\|y\|^p - c_p W_p(\lambda)\|x-y\|^p \tag{9}$$

对 $\forall x, y \in E$, $\lambda \in [0,1]$ 成立. 其中

$$W_p(\lambda) = \lambda^p(1-\lambda) + \lambda(1-\lambda)^p.$$

引理 3 设 E 是一实的 Banach 空间, D 是 E 的非空有界闭凸集. $Q: E \xrightarrow{\text{onto}} D$ 是一保核收缩, 设 $T: D \to D$ 是一致 L- Lipschitzian 映象, $\{x_n\}$ 是由(6)式定义的序列. 则有

$$\|x_{n+1} - Tx_{n+1}\| \leqslant \|x_{n+1} - T^{n+1}x_{n+1}\| + L(L+1)^2\|x_n - T^n x_n\| + L(L+1)\|u_n\| + L^2(L+1)\|v_n\|. \tag{10}$$

证明 证明与文献[4]中引理 2.1 的证法相同, 故略.

关于渐近非扩展映象与渐近非扩展型映象不动点的迭代逼近问题, Goebel- Kirk[1], Kirk[2], 张石生先生等[5,6], Xu[7]等都讨论过. 本文结果改进和推广了文献[1, 2, 5~ 7]中的相应结果.

2 主要结果

本文去掉了文献[5]中相应定理的条件(*):对任意子列 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$, 当 $\|T^{n_i}x_{n_i} - x_{n_i}\| \to 0$ 时就有 $\|Tx_{n_i} - x_{n_i}\| \to 0$. 并将 T 由渐近非扩展型映象推广到了渐近拟非扩展型映象. 且扩大了 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 的范围的情况下证明了以下定理:

定理 1 设 E 是一实的 $p(p>1)$ 一致凸 Banach 空间, D 是 E 的非空有界闭凸集. 设存在非扩张的保核收缩 $Q: E \xrightarrow{\text{onto}} D$, $T: D \to D$ 是一半紧的一致 L- Lipschitzian 的渐近拟非扩张型映象; $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 是[0, 1]中的 2 个数列, 且满足

① $0 < \varepsilon_1 = \inf\{\beta_n : n \geqslant 0\} \leqslant \sup\{\beta_n : n \geqslant 0\} = \varepsilon_2 < 1$;

② $0 < \varepsilon_3 = \inf\{\alpha_n : n \geqslant 0\}$.

如果 $F(T) \neq \Phi$, 设

$$c_n = \sup_{x\in D,\, q\in F(T)}\{\|T^n x - q\|^p - \|x-q\|^p\},$$

$$b_n = \sup_{k\geqslant n}\{c_k\}, (\forall n \geqslant 1).$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ 或 $\lim_{n\to\infty} b_n < 0$. $\{x_n\}$ 是由(6)定义的修正的具误差的 Ishikawa 迭代序列; 则 $\{x_n\}$ 强收敛到 T 的某一不动点 q^*.

证明 任取 $q \in F(T)$, 由于 D 有界, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 是 E 中满足条件(5)的有界列, 且 x_n, T^nQy_n, $T^n x_n$ 均属于 D. 于是由(6)及(9)有

$$\|x_{n+1} - q\|^p = \|Qp_n - Qq\|^p \leqslant \|p_n - q\|^p = \|(1-\alpha_n(x_n - q + u_n) + \alpha_n(T^nQy_n - q + u_n)\|^p \leqslant (1-\alpha_n)\|x_n - q + u_n\|^p + \alpha_n\|T^nQy_n - q + u_n\|^p - c_pW_p(\alpha_n)\|x_n - T^nQy_n\|^p. \tag{11}$$

因 $\{x_n - q\}$, $\{T^nQy_n - q\}$ 有界, 易证: $\exists M > 0$, 使

$$\|x_n - q + u_n\|^p \leqslant \|x_n - q\|^p + M\|u_n\|, \tag{12}$$

$$\|T^nQy_n - q + u_n\|^p \leqslant \|T^nQy_n - q\|^p + M\|u_n\|. \tag{13}$$

将(12), (13)代入(11)化简得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}\|^p \leqslant{}& (1-\alpha_n)\|x_n - q\|^p + \alpha_n\|T^nQy_n - q\|^p + M\|u_n\| - c_pW_p(\alpha_n)\|x_n - T^nQy_n\|^p = \\ & \|x_n - q\|^p + a_n\{\|T^nQy_n - q\|^p - \|Qy_n - q\|^p\} + \alpha_n\{\|Qy_n - q\|^p - \|x_n - q\|^p\} + M\|u_n\| - \\ & c_pW_p(\alpha_n)\|x_n - T^nQy_n\|^p.\end{aligned} \tag{14}$$

首先考察(14)右端第三项, 据引理 2 得

$$\|Qy_n - q\|^p - \|x_n - q\|^p = \|Qy_n - Qq\|^p - \|x_n - q\|^p \leqslant$$

$$\|y_n - q\|^p - \|x_n - q\|^p = \|(1-\beta_n)(x_n - q + v_n) + \beta_n(T^n x_n - q + v_n)\|^p - \|x_n - q\|^p \leqslant (1-\beta_n)\|x_n - q + v_n\|^p + \beta_n\|T^n x_n - q + v_n\|^p - c_p W_p(\beta_n)\|x_n - T^n x_n\|^p - \|x_n - q\|^p. \tag{15}$$

因 $\{x_n - q\}, \{T^n x_n - q\}$ 有界, 故

$$\|x_n - q + v_n\|^p \leqslant \|x_n - q\|^p + M\|v_n\|. \tag{16}$$

$$\|T^n x_n - q + v_n\|^p \leqslant \|T^n x_n - q\|^p + M\|v_n\|. \tag{17}$$

将(16), (17) 代入(15) 并化简得

$$\|Qy_n - q\|^p - \|x_n - q\|^p \leqslant \beta_n\{\|T^n x_n - q\|^p - \|x_n - q\|^p\} + M\|v_n\| - c_p W_p(\beta_n)\|x_n - T^n x_n\|^p. \tag{18}$$

把(18) 代入(14) 化简得

$$\|x_{n+1} - q\|^p \leqslant \|x_n - q\|^p + \alpha_n\{\|T^n Q y_n - q\|^p - \|Qy_n - q\|^p\} + M\|u_n\| - c_p W_p(\alpha_n)\|x_n - T^n Q y_n\|^p + \alpha_n\{\beta_n[\|T^n x_n - q\|^p - \|x_n - q\|^p] + M\|v_n\| - c_p W_p(\beta_n)\|x_n - T^n x_n\|^p\} \leqslant \|x_n - q\|^p + \alpha_n\{\|T^n Q y_n - q\|^p - \|Qy_n - q\|^p\} + \alpha_n\beta_n\{\|T^n x_n - q\|^p - \|x_n - q\|^p\} + M[\alpha_n\|v_n\| + \|u_n\|] - \alpha_n c_p W_p(\beta_n)\|x_n - T^n x_n\|^p. \tag{19}$$

因为 T 是渐近拟非扩张型映象, 故

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sup_{x\in D,\, q\in F(T)} \|T^n x - q\| - \|x - q\|\right\} \leqslant 0.$$

从而有

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sup_{x\in D,\, q\in F(T)} \|T^n x - q\|^p - \|x - q\|^p\right\} \leqslant 0. \tag{20}$$

即: $\lim_{n\to\infty} b_n \leqslant 0$. 下面分 2 种情况分别讨论:

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. 据 $\{b_n\}$ 的定义知: $\{b_n\}$ 单调减少, 故: $b_n \geqslant 0$, $(\forall n \geqslant 1)$. 且 $\forall x \in D$ 有

$$\|T^n x - q\|^p - \|x - q\|^p \leqslant b_n, \ (\forall n \geqslant 1). \tag{21}$$

而 $Qy_n \in D$, $x_n \in D$; 据(21) 应有

$$\begin{cases} \|T^n Q y_n - q\|^p - \|Qy_n - q\|^p \leqslant b_n, \\ \|T^n x_n - q\|^p - \|x_n - q\|^p \leqslant b_n, \end{cases} \quad (\forall n \geqslant 1). \tag{22}$$

将(22) 代入(19) 得

$$\|x_{n+1} - q\|^p \leqslant \|x_n - q\|^p - \alpha_n c_p W_p(\beta_n)\|x_n - T^n x_n\|^p + (1+\beta_n)\alpha_n b_n + M[\alpha_n\|v_n\| + \|u_n\|] = \|x_n - q\|^p - \alpha_n c_p\{\beta_n^p(1-\beta_n) + \beta_n(1-\beta_n)^p\}\|x_n - T^n x_n\|^p + (1+\beta_n)\alpha_n b_n + M[\alpha_n\|v_n\| + \|u_n\|] \leqslant \|x_n - q\|^p - \varepsilon_3 c_p\{\varepsilon_1^p(1-\varepsilon_2) + \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)^p\}\|x_n - T^n x_n\|^p + (1+\beta_n)\alpha_n b_n + M[\alpha_n\|v_n\| + \|u_n\|], \tag{23}$$

令

$$\varepsilon = \varepsilon_3 c_p\{\varepsilon_1^p(1-\varepsilon_2) + \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)^p\},$$
$$B_n = (1+\beta_n)\alpha_n b_n + M[\alpha_n\|v_n\| + \|u_n\|],$$

则据(5) 及条件 ①, ② 和 $c_p > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ 知: $\varepsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} B_n < \infty$. 则(23) 变为

$$\|x_{n+1} - q\|^p \leqslant \|x_n - q\|^p - \varepsilon\|x_n - T^n x_n\|^p + B_n. \tag{24}$$

由(24) 得

$$\|x_{n+1} - q\|^p \leqslant \|x_n - q\|^p + B_n,$$

据引理 1 知 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ 存在; 又由(24) 有

$$\varepsilon\lim_{n\to\infty}\|x_n - T^n x_n\|^p \leqslant \lim_{n\to\infty}\{\|x_n - q\|^p - \|x_{n+1} - q\|^p + B_n\} = 0,$$

从而 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T^n x_n\| = 0$. 据引理 3 得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$. 因 T 是半紧的, 故: 存在子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, 使 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = q^* \in D$. 由于 T 是连续的, 故 $\|Tq^* - q^*\| = \lim_{k\to\infty}\|Tx_{n_k} - x_{n_k}\| = 0$, 即 $q^* \in F(T)$. 已证 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ 存在, 由 $q \in F(T)$ 的任意性知 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q^*\|$ 存在; 又 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = q^* \in F(T)$. 故 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q^*\| = 0$, 即 $\lim_{n\to\infty} x_n = q^* \in F(T)$.

(2) 若 $\lim_{n\to\infty} b_n < 0$. 则 $\exists\, n_0 \in N$, $\forall n \geqslant n_0$, 有

$b_n < 0$. 从而, $\forall x \in D$, $\forall n \geqslant n_0$ 有

$$\| T^n x - q \|^p - \| x - q \|^p < 0.$$

而 $Qy_n \in D$, $x_n \in D$, 应有

$$\| T^n Q y_n - q \|^p - \| Q y_n - q \|^p < 0$$

与

$$\| T^n x_n - q \|^p - \| x_n - q \|^p < 0. \qquad (25)$$

将(25) 代入(19) 得

$$\| x_{n+1} - q \|^p \leqslant$$
$$\| x_n - q \|^p - \alpha_n c_p W_p(\beta_n) \| x_n - T^n x_n \|^p + M[\alpha_n \| v_n \| + \| u_n \|]. \qquad (26)$$

由(26), 同(1) 一样可证

$$\lim_{n\to\infty} x_n = q^* \in F(T)$$

定理 1 得证.

由于渐近非扩张型映象必是渐近拟非扩张型映象. 因此, 将定理 1 中的条件 $T: D \to D$ 是一半紧的渐近拟非扩张型映象, 换为 $T: D \to D$ 是一半紧的渐近非扩张型映象时. 结论仍然成立.

仿定理 1 的证明, 可证明下面定理成立:

定理 2 设 E 是一实的 $p(p > 1)$ 一致凸 Banach 空间, D 是 E 的非空有界闭凸集. 设存在非扩张的保核收缩 $Q: E \xrightarrow{\text{onto}} D$, $T: D \to D$ 是一半紧的一致 $L-$ Lipschitzian 的渐近拟非扩张型映象; $\{\alpha_n\}$ 是[0, 1] 中的数列, 且满足

$0 < \varepsilon_3 = \inf\{\alpha_n: n \geqslant 0\} \leqslant \sup\{\alpha_n: n \geqslant 0\} = \varepsilon_4 < 1$. 如果 $F(T) \neq \Phi$. 设

$$c_n = \sup_{x\in D,\, q\in F(T)} \{ \| T^n x - q \|^p - \| x - q \|^p \},$$

$$b_n = \sup_{k\geqslant n} \{ c_k \}, (\forall n \geqslant 1).$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ 或 $\lim_{n\to\infty} b_n < 0$. $\{x_n\}$ 或是由(7) 定义的具误差的 Mann 迭代序列; 则$\{x_n\}$ 强收敛到 T 的某一不动点 q^*.

在定理 1 中, 如果 $u_n = v_n = \theta$, $\forall n \geqslant 0$ 则条件" 存在非扩张的保核收缩 $Q: E \xrightarrow{\text{onto}} D$" 是不必要的. 因而有以下结果:

定理 3 设 E 是一实的 $p(p > 1)$ 一致凸 Banach 空间, D 是 E 的非空有界闭凸集. $T: D \to D$ 是一半紧的 $L-$ Lipschitzian 的渐近拟非扩张型映象; $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 是[0, 1] 中的 2 个数列, 且满足

① $0 < \varepsilon_1 = \inf\{\beta_n: n \geqslant 0\} \leqslant \sup\{\beta_n: n \geqslant 0\} = \varepsilon_2 < 1$;

② $0 < \varepsilon_3 = \inf\{\alpha_n: n \geqslant 0\}$.

如果 $F(T) \neq \Phi$. 设

$$c_n = \sup_{x\in D,\, q\in F(T)} \{ \| T^n x - q \|^p - \| x - q \|^p \},$$

$$b_n = \sup_{k\geqslant n} \{ c_k \}, (\forall n \geqslant 1).$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ 或 $\lim_{n\to\infty} b_n < 0$. $\{x_n\}$ 是由下式定义的修正的 Ishikawa 迭代序列

$$\begin{cases} x_0 \in D, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n T^n y_n, \\ y_n = (1 - \beta_n) x_n + \beta_n T^n x_n, \end{cases}$$

则$\{x_n\}$ 强收敛到 T 的某一不动点 q^*.

参考文献:

[1] GOEBEL K, KIRK W A. A fixed point theorem for asymptoticaly nonexpansive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1972, 35(1): 171—174.

[2] KIRK W A. Fixed point theorem for non-lipschitzian mappings of asymptoticaly nonexpansive type[J]. Israel J Math, 1974, 11: 339—346.

[3] XU H K. Inequalities in banach spaces with applications [J]. Nonlinear Anal TMA, 1991, 16(12): 1 127—1 138.

[4] LIU Ze-qing. Iterative approximation of fixed points for generalized asymptotically contractive and generalized hemicontractive mappings[J]. Pan-American Mathematical Journal, 2002, 4: 67—74.

[5] 张石生. Banach 空间中渐近非扩张型映象不动点的迭代逼近问题[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(1): 23—31.

[6] CHANG Shi-sen, CHO Y J, JUNG J S, et al. Iterative approximation of fixed point and solutions for strongly accretive and strongly pseudo-contractive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, 224: 149—165.

[7] XU H K. Existence an convergence for fixed points of mappings of asymptotically nonexpansive type[J]. Nonlinear Anal TMA, 1991, 16(12): 1 139—1 146.

The iterative approximation for the fixed points of asymptotically

WANG Shao-rong[1, 2], ZUO Guo-chao[3]
(1. Department of Mathematics, Dali College, Dali 671000, China;
2. Institute of Applied Mathematics of Yunnan, Yunnan University, Kunming 650091, China;
3. Department of Computer Science, Dali College, Dali 671000, China)

Abstract: The purpose is to study the iterative approximation problems of fixed points for asymptotically nonexpansive type mappings in Banach spaces without the usually used condition: "For any, $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$, if $\| T^{n_i}x_{n_i} - x_{n_i} \| \to 0$, then $\| Tx_{n_i} - x_{n_i} \| \to 0$". The results improve the corresponding results in literatures.

Key words: asymptotically quasi-nonexpansive mapping; modified ishikawa iterative sequence with errors; fixed point

MSC(2000): 47H10

* *

(上接第 278 页)

[5] 乔克林, 何树红, 马乐荣. 考虑投资收益率随机变化的复合二项风险模型的破产概率[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2002, 21(4): 13—16.

[6] 汉斯 U• 盖伯. 学风险论导引[M]. 成世学, 严　颖译. 北京: 世界图书出版公司, 1997.

Double Cox risk model

HE Shu-hong, XU Xing-fu
(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: Double Cox Risk Model is a generalization of the classical risk model when assume both the arrival of policies and the occurrence of claims are Cox process. A upper bound of the ruin probability is got and a explicit expression of $\Psi(u)$ is given when the arrival of the policies and the occurrence of the claims have the same intensity process.

Key words: ruin probability; Cox process; lundberg index

MSC(2000): 91B30