地球自转对地球重力场时变特征影响的理论研究。

张捍卫1,2, 许厚泽2, 王爱生1,2

(1. 徐州师范大学 国土信息与测绘工程系, 江苏 徐州 221116; 2. 中国科学院 测量与地球物理研究所, 湖北 武汉 430077)

摘要: 精密和详细测定地球重力场及其时间变化, 是目前卫星重力测量的主要课题. 地极移动和日长变化导致地球引力位系数产生时变特性并引起重力的摄动. 根据理论力学的基本概念, 详细推导了由于地球自转引起的地球引力位系数变化、重力摄动和垂线偏差的表达式, 并定量地研究了极移和日长变化对测站重力观测值的影响. 同时基于 EGM 96 地球引力位模型, 给出了地球引力位系数 C_2^1 和 S_2^1 的理论公式. 研究表明在高精度的空间大地测量中要顾及到地球自转变化引起的一系列效应.

关键词: 地球自转: 地球引力位系数: 重力变化

中图分类号: P 312.1 文献标识码: A 文章编号: 0258-7971(2004)06-0504-05

潮汐是在地球参考系中、即在地球表面上测定 的,它不仅仅受到日月和其它行星的引力作用,而 且还涉及到一个惯性力的贡献,也就是地球外壳并 不构成一个惯性系,除了由于地球表面的潮汐位移 引起的相对加速度外,还存在由于参考系的旋转引 起的 Coriolis 力和离心力, 所有的近代地球潮汐理 论都认为地球是均匀旋转的,由于极移和日长变化 引起的附加效应一般被忽略了. 为了校正重力计测 定的重力变化,国际地潮中心(ICET)考虑了长周 期极移项(Chandler 摆动和周年摆动)对重力的影 响, 由于仅仅使用的是天球历书轴(CEP)的极移, 所以没有考虑自转轴的周日极移, 周日极移的影响 是相当重要的,研究表明在 O1 和 K1 潮汐频率上 它可达到 10^{-9} m/s² 的量级, 而在这个频段上的标 准偏差是 10^{-11} m/s² 的水平. 除了周日极移的影 响外, 日长变化对重力的影响同样是不可忽略的. 日长的带谐潮变化对重力的影响虽然非常有限,但 日长的非潮汐变化对重力的影响可达到 10^{-9} m/s² 水平, 这在研究重力长期漂移时是非常重要的[1], 由于地球是一个弹性体,它在自转离心力的作用下 会产生形变, 伴随形变产生的地球体积和密度分布 的变化将引起一个形变附加位,这个形变附加位不

仅导致弹性地球固体表面发生形变, 还会引起地球 外部引力场和重力场的变化.

根据理论力学中的惯性系和转动参考系的基本理论,导出了由于地球自转惯性离心力引起的一系列天文地球动力学效应,并对其进行了定量研究.建议在高精度的空间大地测量中应顾及到地球自转变化引起的一系列效应.

1 地球自转引起的离心力和离心力位

地球在没有外力的情况下处于流体静力学平衡状态,设某一测站在平衡地球上的位置矢量为x,在外力的作用下测站的位置矢量变为r,它们之间的关系为

$$r = x + u, \tag{1}$$

其中 u 为形变位移矢量. 令地球参考系相对惯性空间以角速度 ω 在旋转, ω 在地球参考系中的表达式为

$$\begin{cases} \omega = \Omega \mathbf{k} + \Omega \mathbf{m}, \\ \mathbf{m} = m_1 \mathbf{i} + m_2 \mathbf{j} + m_3 \mathbf{k}, \end{cases}$$
 (2)

这里 Ω 为地球平均自转速率. 根据理论力学关于转动参考系的理论,可得绝对加速度、相对加速度和惯性加速度之间的关系为 $^{[2]}$

^{*} 收稿日期:2003-12-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40374030; 40234039); 地球空间环境与大地测量教育部重点实验室资助项目(020915);中国科学院知识创新工程重要方向资助项目(KZCX3-SW-132).

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2(\ \omega \times \mathbf{r}) + \ \omega \times \mathbf{r} + \\ \omega \times (\ \omega \times \mathbf{r}), \tag{3}$$

这里上标一点指的是相对于地球参考系的时间导数, 即 d/dt. 把(1) 式和(2) 式代入(3) 式可得

$$a = a' + a_0 + a_m + a_u + a^{2d},$$
 (4a)

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_u - \mathbf{a}^{2d}, \tag{4b}$$

其中

$$\begin{cases}
a' = \frac{d^{2}r}{dt^{2}} = \frac{d^{2}u}{dt^{2}}, \\
a_{0} = \Omega k \times (\Omega k \times x)
\end{cases}$$

$$a_{m} = \Omega m \times (\Omega k \times x) + \frac{\partial}{\partial x} \times (\Omega m \times x) + \frac{\partial}{\partial x} \times (\Omega m \times x) + \frac{\partial}{\partial x} \times (\Omega h \times u) + \frac{\partial}{\partial x} \times (\Omega h \times u),$$

$$(5d)$$

这里 a' 为测站相对地球参考系的加速度,是可用仪器测量的量; a 为测站相对惯性空间的加速度,也就是测站点受到的单位质量的外力(包括地球引力、日月和行星的引潮力和地球形变附加力等); $-a_0$ 是假设地球相对惯性空间作稳恒旋转时的惯性离心力, 它与地球引力一起构成地球的正常重力场; $-a_m$ 为由于极移和地球自转速率变化引起的惯性离心力; $-a_u$ 为由于地球形变引起的惯性离心力和Coriolis力; $m-a^{2d}$ 是由于地球自转变化和潮汐形变引起的惯性力, 相对于 $-a_m$ 和 $-a_u$ 为高阶小量, 可以忽略不计.

在地球参考系中,由于地球自转及其变化引起的单位质量的惯性离心力 f_R 可表示为

$$f_{R} = -a_{0} - a_{m} = -\Omega k \times (\Omega k \times x) - \Omega m \times (\Omega k \times x) - \Omega k \times (\Omega m \times x) - \Omega m \times x.$$

把x = xi + yj + zk 代入上式, 并略去最后一项, 可得

$$f_{R} = \Omega^{2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + \Omega^{2}(2xm_{3} - zm_{1})\mathbf{i} + \Omega^{2}(2ym_{3} - zm_{2})\mathbf{j} - \Omega^{2}(xm_{1} + ym_{2}) = \nabla V_{R}, \qquad (6)$$

$$V_{R} = \frac{1}{2}\Omega^{2}(x^{2} + y^{2}) + \Omega^{2}(x^{2} + y^{2})m_{3} - \Omega^{2}(xzm_{1} + yzm_{2}). \qquad (7)$$

(7) 式就是地球自转引起的离心力位.

2 地球自转对地球引力位的影响

根据测站位置矢量的球坐标与直空间直角坐标的关系式($x = r \cos \varphi \cos \lambda, y = r \cos \varphi \sin \lambda, z = r \sin \varphi$) 并代入到(7) 式, 可得

$$V_{R} = \Omega^{2} r^{2} \left[\frac{1}{2} \cos^{2} \varphi + m_{3} \cos^{2} \varphi - \sin \varphi \cos \varphi (m_{1} \cos \lambda + m_{2} \sin \lambda) \right] =$$

$$\frac{1}{3} \Omega^{2} r^{2} \left[(1 - P_{2}^{0} (\sin \varphi)) + 2m_{3} (1 - P_{2}^{0} (\sin \varphi)) - P_{2}^{1} (\sin \varphi) (m_{1} \cos \lambda + m_{2} \sin \lambda) \right] =$$

$$\frac{1}{3} \Omega^{2} r^{2} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \Omega^{2} r^{2} \overline{P}_{2}^{0} (\sin \varphi) +$$

$$\frac{1}{3} \Omega^{2} r^{2} \left[2m_{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \overline{P}_{2}^{0} (\sin \varphi) \right) - \sqrt{\frac{3}{5}} \overline{P}_{2}^{1} (\sin \varphi) (m_{1} \cos \lambda + m_{2} \sin \lambda) \right].$$
(8)

上式第1项在地球各点产生了一个完全对称的径向形变; 第2项对于地球上的各点是一个不随时间变化的常数项, 可以认为从地球诞生以来长期作用在地球上; 其余的则是由于地球自转变化引起的周期性的影响.

根据 Dirichlet 原理, 离心力位 V_R 在空间矢径为 $\mathbf{r}(r \ge R_e)$ 的一点产生的形变附加位是

$$V'_{m} = \left(\frac{R_{e}}{r}\right)^{2n+1} \sum k_{n} V_{R}(n) =$$

$$-\frac{1}{3\sqrt{5}} \frac{R_{e}^{5}}{r^{3}} k_{f} \Omega^{2} \overline{P}_{2}^{0}(\sin \varphi) +$$

$$\frac{2}{3} \Omega^{2} \frac{R_{e}^{5}}{r^{3}} k_{20} m_{3} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \overline{P}_{2}^{0}(\sin \varphi)\right] -$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{5}} \Omega^{2} \frac{R_{e}^{5}}{r^{3}} k_{21} \overline{P}_{2}^{1}(\sin \varphi) \cdot$$

$$(m_{1}\cos \lambda + m_{2}\sin \lambda), \qquad (9)$$

这里 R_e 是地球赤道半径, k_f 为长期Love数, k_{2m} 为固体潮二阶位 Love 数. 地球外部引力位的表达式是 f^{3}

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{Gm \odot}{r} + \frac{Gm \odot}{r^2} [z_0 P_1^0(\cos \theta) + (x_0 \cos \lambda + y_0 \sin \lambda) P_1^1(\cos \theta)] + \frac{Gm \odot}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} \bullet$$

$$(\overline{C}_n^m \cos m \lambda + \overline{S}_n^m \sin m \lambda) \overline{P}_n^m (\cos \theta),$$
(10)

这里 $m \odot$ 为地球质量, x_0 , y_0 和 z_0 是地球质心在地球参考系中的坐标, $\overline{P}_n^m(\sin\varphi) = N_{n,m}P_n^m(\sin\varphi)$. 比较(9) 式和(10) 式, 可得地球自转对地球引力位系数的影响为

$$\begin{cases}
\overline{C}_{2}^{0}(\cos s) = -\frac{\Omega^{2} R_{e}^{3}}{3\sqrt{5} Gm \odot} k_{f}, \\
\Delta \overline{C}_{2}^{0}(R) = -\frac{2\Omega^{2} R_{e}^{3}}{3\sqrt{5} Gm \odot} k_{20} m_{3},
\end{cases}$$
(11)

$$\Delta \overline{C}_{2}^{1}(R) - i \Delta \overline{S}_{2}^{1}(R) = -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \frac{\Omega^{2} R_{e}^{3}}{G m_{\Theta}} k_{21}(m_{1} - i m_{2}), \qquad (12)$$

其中 $C_2^0(\cos)$ 为 C_2^0 中不变化的部分, $\Delta C_2^0(R)$ 是由于地球自转引起的 C_2^0 的变化部分. 由(11) 式中的第 1 式可求 得长期 Love 数 k_f 的数值,通常称 $C_2^0(\cos)$ 为地球动力学形状因子,是一个常用的地球物理常数. 根据 EGM 96 引力位模型可得

$$k_f = -\frac{3\sqrt{5}Gm_{\odot}}{\Omega^2 R_e^3} \overline{C}_2^0(\text{cons}) = 0.938.$$
 (13)

由于地球自转参数 m_1, m_2 和 m_3 与日长变化 ΔLod 和极移 x_p, y_p 之间的关系为

$$m_1 = x_p'' / 0', m_2 = -y_p'' / 0',$$

 $m_3 = \Delta Lod / 86 400 000.$

并取 $k_{20} = 0.30190$, $k_{21} = 0.3077 + i0.0036^{[4]}$, 这样(11) 和(12) 式可写为

$$\Delta \overline{C}_{2}^{0}(R) = -3.606 \times 10^{-12} \,\Delta Lod, \qquad (14)$$

$$\Delta \overline{C}_{2}^{1}(R) = -1.333 \times 10^{-9} (x_{p}^{"} - 0.00117y_{p}^{"}), \qquad (15)$$

$$\Delta \overline{S}_{2}^{1}(R) = 1.333 \times 10^{-9} (y_{p}^{"} + 0.00117x_{p}).$$

$$\Delta \overline{S}_{2}^{1}(R) = 1.333 \times 10^{-9} (y_{p}^{"} + 0.00117x_{p}^{"}),$$
(15)

式中 $\triangle Lod$ 以 ms 为单位, x_p , y_p 以 as 为单位. 在 IERS2000^{f4f} 中只给出了极移对引力位的影响, 而 没有给出地球自转速率变化对引力位的影响, 从 (14) 式看出在 10^{-11} m/s 的精度上地球自转速率的影响也是不可忽视的.

3 地球自转对重力和垂线偏差的影响

地球自转对重力和垂线偏差的影响为 $\Delta \mathbf{g} = \nabla V_R$,

上式的径向分量(指向向径外为正), 北南分量(向 北为正)和东西分量(向东为正)分别为

$$\Delta g = \frac{\partial V_R}{\partial r} = \Omega^2 r \left[2 m_3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \left(m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda \right) \right], \tag{17}$$

$$\Delta g \varphi = \frac{\partial V_R}{r \partial \varphi} = \Omega^2 r [-m_3 \sin 2 \varphi - \cos 2 \varphi (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda)], \qquad (18)$$

$$\Delta g \lambda = \frac{\partial V_R}{r \cos \varphi \partial \lambda} = \frac{\Omega^2 r \sin \varphi (m_1 \sin \lambda - m_2 \cos \lambda)}{(19)}$$

在地球表面由极移引起的重力变化为

$$\Delta g = -\Omega^2 R_e \sin 2 \, \Phi(m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda) =$$

$$\Omega^2 R_e \sin 2 \, \Phi \sum m_j \cos(\, \Phi_t + \, \Phi_{0j} - \, \lambda), \qquad (20)$$

其中 m_j , ς 和 ς_0 , 为某一摆动的振幅、角频率和相位. 重力观测是相对于地球瞬时自转轴进行的,所以 m_j 应是地球瞬时自转轴的极移,它主要包括 Chandler 摆动、周年受迫摆动和周日受迫摆动等,其中周日受迫摆动是可以根据田谐引潮力位计算 出来的. Chandler 摆动的最大振幅为 300×10^{-8} m/s², 它对重力观测值的影响为 $4\varsigma \leq 5 \times 10^{-8}$ m/s². 表 1 是根据地球自转动力学方程和潮汐展开数据计算得到的周日极移对重力振幅的影响,符号 (+) 和(-) 分别表示的是顺行和逆行的圆章动分量,可看出周日极移对重力的影响最大不超过 0.2×10^{-8} m/s².

地球自转速率变化引起的重力摄动为

$$\Delta g_{m_3} = 2 m_3 \Omega^2 R_e \cos^2 \varphi.$$
 (21)

地球自转速率变化的类型主要有带谐潮变化、长期变化、季节性变化和日长突变等,相应引起的重力变化分别有周期从几天到 18.6a 的带谐潮变化、重力的长期漂移、周年和半年的季节性变化和重力的突变. 在赤道上,地球自转速率变化引起的重力摄动可达到 $0.2 \times 10^{-8} \, \text{m/s}^2$.

由(18) 或(19) 式可以估计地球自转变化对垂 线偏差影响的量级为

$$n \leqslant \frac{\Omega^2 R_{em}}{g_0} \approx 71 \text{ } \mu_{as.} \tag{22}$$

可见极移和日长变化对垂线偏差的影响不超过 71 山as, 低于当前各种新技术的观测精度, 一般认为地 球自转变化对垂线偏差没有影响. 周日极移引起重力变化

Tab. 1	Diurnal polar	motron	cause th	he varidfions	of gravity

表 1

章动周期		相应潮波	TRS 周期/ h	重力变化* sin2 ^φ /(×10 ¹¹ m•s ⁻²)
∞		K1	23. 93	166
18.6 a	(+)		23. 93	22
0. 5 a	(+)	P1	24. 07	57
27.5 d	(+)	M 1	24. 83	9
	(-)	J1	23. 10	9
13.66 d	(+)	01	25. 82	131
	(-)	001	22. 31	5
13.63 d	(+)		25. 82	24
9. 13 d	(+)	Q1	26. 87	25

地球引力位系数 C_1 和 S_2 的确定

目前常用的地球引力位模型主要有 RGM96. JGM-3和GRIM5-C1模型.而IERS推荐的是 EGM96 引力位模型, 值得注意的是, EGM96 引力 位模型给出了位系数 \overline{C}_2^1 和 \overline{S}_2^2 的数值. \overline{C}_2^1 和 \overline{S}_2^2 描述的是地球形状轴的运动、且其一定时间跨度的 平均值与自转轴的平均位置基本一致, 平均形状轴 与平均自转轴的差异是由于大气、海洋和地球液核 的长周期运动所致, EGM96 模型给出的 \overline{C}_{2} 和 \overline{S}_{2}^{1} 确定的形状轴是相应干地球参考系之平均极轴的 位置.

卫星轨道的测定涉及到地球参考系和惯性参 考系, 地球引力位是在地球参考系中描述的, 而卫 星轨道的计算必须在惯性参考系中进行. 这样利用 地球引力位系数求解卫星轨道时,必须进行地球参 考系和惯性参考系之间的转换,在这一转换中包括 了极移运动. 假定极移是 IERS 参考极运动的参 数. 并令 x, y 为地球参考系的极轴相对于 IERS 参 考极的角位移. 同时令以 IERS 参考极为极轴的地 球固定参考系中,地球内部任意一点的坐标为(X)Y, Z), 而在地球参考系中地球内部任意一点的坐 标为(x, y, z),根据地球参考系的定义可知

$$\begin{cases} C_2^1(TRS) = \frac{1}{m \odot R^2} \int_{(M)} xz \, dm \, (Q) = 0, \\ S_2^1(TRS) = \frac{1}{m \odot R^2} \int_{(M)} yz \, dm \, (Q) = 0. \end{cases}$$
(23)

根据地球二阶引力位系数与地球惯量张量的关 系[5]. 在地球参考系中可得

$$\begin{cases} C_2^0 - 2C_2^2 = \frac{\int (z^2 - x^2) dm}{MR^2}, \\ - C_2^0 - 2C_2^2 = \frac{\int (y^2 - z^2) dm}{MR^2}. \end{cases}$$
 (25)

利用(24), 并考虑到(23) 和(25) 式, 可以推得

$$C_{2}^{1}(IERS) = \frac{1}{m \odot R^{2}} \int_{(M)} XZ dm(Q) = \frac{1}{m \odot R^{2}} \int_{(M)} (x + \overline{xz}) \cdot (z - \overline{xx} + \overline{yy}) dm(Q) = \frac{1}{m \odot R^{2}} \int_{(M)} [xz + \overline{x}(z^{2} - x^{2}) + \overline{yxy}] dm(Q) = \overline{x}(C_{2}^{0} - 2C_{2}^{2}) + 2\overline{yS}_{2}^{2},$$
(26)
$$S_{2}^{1}(IERS) = \frac{1}{m \odot R^{2}} \int_{(M)} YZ dm(Q) = \frac{1}{m \odot R^{2}} \int_{(M)} (y - \overline{yz}) \cdot$$

$$(z - x\bar{x} - y\bar{y}) dm(Q) = \frac{1}{m \odot R^2} \int_{(M)} [yz + y\bar{y}(y^2 - z^2) - x\bar{x}y] dm(Q) = -y\bar{y}(C_2^0 + 2C_2^2) - 2x\bar{S}_2^2.$$
(27)

对(26) 和(27) 进行规格化, 可得

$$\overline{C}_{2}^{1}(IERS) = \sqrt{3}x\overline{C}_{2}^{0} - x\overline{C}_{2}^{2} + y\overline{S}_{2}^{2}, \qquad (28)$$

$$\vec{S}_{2}^{1}(IERS) = -\sqrt{3}y\overline{C}_{2}^{0} - y\overline{C}_{2}^{2} - x\overline{S}_{2}^{2}.$$
 (29)

由于 IERS2000^[4] 给出

$$\bar{x} = 0.262 \times 10^{-6}, \ \bar{y} = 1.730 \times 10^{-6},$$
 (30)

$$\begin{cases} \bar{C}_{2}^{0}(tf) = -4.84165209 \times 10^{-4}, \\ \bar{C}_{2}^{0}(zt) = -4.84169382 \times 10^{-4}, \end{cases}$$
 (31)

$$\frac{d\overline{C}_2^0}{dt} = 1.162755 \times 10^{-11} (a)^{-1}.$$
 (32)

这样有

$$\overline{C}_{2}^{1}(IERS) = -2.23 \times 10^{-10},
\overline{S}_{2}^{1}(IERS) = 14.48 \times 10^{-10}.$$
(33)

公式(30)~(32)给出的数值都是在 2000年 1月 1日时的数值,但在实际的卫星轨道确定中,必须求出它们的瞬时值和其时间导数.

5 小 结

本文研究了地球自转变化对地球重力场时变

特征的影响. 在研究地球自转效应时, 顾及了地球自转速率的变化, 而在 IER S2000 中没有考虑这一效应. 由于地球自转速率变化存在着长期变化、周期变化和日长的突变, 对地球重力场的影响也存在着相应的变化, 影响的量级达到几十× 10^{-11} m/s 2 到 200×10^{-11} m/s 2 .

基于潮汐展开研究了地球自转变化对重力和 垂线偏差的影响, 给出了相应的公式, 并进行了定量计算. 基于 EGM 96 地球引力位模型, 给出了地球引力位负系数 C_2 和 S_2 的理论公式.

参考文献:

- [1] 张捍卫, 许厚泽, 郑 勇, 等. 地球自转的天文地球动力学效应研究——引力位和重力的变化[J]. 地球物理学进展, 2002, 17(3): 424—429.
- [2] 周衍柏. 理论力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995.
- [3] 郭俊义. 地球物理学基础[M]. 北京: 测绘出版社, 2001.
- [4] IERS2000, McCarthy, D D, (ed), 2003, IERS Technical Note32, http://maia.usno.navy.mil/conv2000.html.
- [5] 高布锡. 天文地球动力学原理[M]. 北京: 科学出版 社, 1997.

Theoretical research of effects of earth rotation on the temporal changes of gravitational field

ZHANG Harrwei^{1, 2}, XU Hourze², WANG Disheng^{1, 2}

(1. Department of Territory Information and Mapping Engineering, Xuzhou Normal University, Xuzhou 221116, China; 2. Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430077, China)

Abstract: Gravitational field and its variation with time accurately were surveyed in detail. The polar motion and length of day (LOD) changes are known to cause the temporal variations in the gravitational field. The effects of the earth's rotation on the geopotential coefficients, gravitational perturbs and vertical deviation is modeled. It is numerically estimated, with these models, the changes in the gravity observations of some sites. We derive the formulas of the geopotential coefficients \overline{C}_2^1 and \overline{S}_2^1 for EGM 96 model. The results suggest that the series of effects on the gravitational field due to the variations of the earth's rotation should be accounted for in high precision space geodesy.

Key words: earth's rotation; geopotential coefficient; gravitational perturbs