

研究简报

无纹理图像修复模型的快速数值算法

赵锐¹, 罗宏文², 王翔²

(1. 长春工业大学 计算机科学与工程学院, 长春 130012; 2. 吉林大学 数学学院, 长春 130012)

摘要: 将曲率驱动扩散(CDD)模型应用于无纹理图像的修复, 对其数值离散格式进行改进, 计算分为两步执行: 在修复区域内采用时间步进法; 修复区域外利用加性算子分裂方法, 该方法加快了收敛速度, 数值实验结果表明效果较好。

关键词: 图像修复; 无纹理图像; 加性算子分裂方法

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2011)02-0255-04

Fast Algorithm for Non-texture Image Inpainting Model

ZHAO Rui¹, LUO Hong-wen², WANG Xiang²

(1. School of Computer Science and Engineering, Changchun University of Technology, Changchun 130012, China;

2. College of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China)

Abstract: The curvature-driven diffusions (CDD) model was applied to the non-texture image inpainting. The numerical discretization scheme was developed. The computation is constituted of two steps. For inside the inpainting domain, we employed the time match method; while for outside the inpainting domain, we employed the additive operator splitting (AOS) method, which can gain an accelerated convergence. The experiment results are satisfying.

Key words: image inpainting; non-texture image; additive operator splitting (AOS) method

在图像的存储和传输过程中可能导致信息模糊或信息丢失, 从而影响图像的整体效果. 因此, 图像修复十分必要. 修复算法的目标是使图像的恢复部分和图像的其余部分一致, 并使恢复后的图像尽可能与原图像接近. 传统的图像复原技术如维纳滤波方法和卡尔曼滤波方法等仅适合复原无噪声图像和高信噪比条件下的图像, 同时存在计算量大的问题^[1].

近年来, 图像复原技术得到了快速发展^[2-3], 文献[4]综述了两类图像——有纹理图像和无纹理图像的修复技术. 有纹理图像的修复是根据图像的基本特征和相互关系构造一个概率分布, 重构缺损的信息^[5-8]. 无纹理数字图像的修复^[9]实质是一种基于偏微分方程(PDE)的格式. Chan 和 Shen^[10]基于变分原理提出了总变分(TV)修复模型, 该格式与经典的 ROF 恢复模型^[11]紧密联系. 文献[12]针对非纹理图像修复提出了曲率驱动的扩散模型(CDD), 该模型针对 TV 模型的传导系数进行改进. 由于在图像边缘处扩散系数的退化, 因此如何快速求解这些模型对应的 PDE 成为研究热点. 文献[13]使用区域分解法求解 PDE, 实现了并行性; 文献[14]使用不动点方法求解 PDE, 提高了收敛速度; 文献[12]使用一种改进的时间步进法求解 PDE, 即先运行 TV 修复模型得到一个初始值, 作为猜测值加入到 CDD 模型再求解, 加快了收敛速度.

收稿日期: 2010-05-24.

作者简介: 赵锐(1972—), 男, 汉族, 实验师, 从事计算机网络的研究, E-mail: woshilaozhao@tom.com. 通讯作者: 罗宏文(1968—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 从事计算机图形图像处理及模式识别的研究, E-mail: luohw@jlu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: J0730101).

本文将 CDD 模型应用于无纹理图像的修复,数值离散分为修复区域内和修复区域外两步执行,即在修复区域内采用时间步进法^[12],而修复区域外利用加性算子分裂(additive operator splitting, AOS)方法^[15]进行数值离散,该数值格式为半隐格式,具有无条件稳定性,克服了显格式对时间步长的限制,减少了计算量,加快了收敛速度,数值实验效果较好.

1 曲率驱动扩散(CDD)修复模型

CDD 修复模型的基本思想是将图像 u 视为某类粒子密度函数,将初始图像可利用部分 u^0 视为一个恒定的源或者通过在边界交换的粒子沉积.图像的修复过程视为粒子通过边界不断流进待修复区域的扩散过程实现,在修复同时也实现去噪.对应的 Euler-Lagrange 方程为^[12]

$$u_t = \nabla \cdot \left[\frac{G(\mathbf{x}, |\kappa|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] + \lambda_e(\mathbf{x})(u - u^0), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

其中: Ω 为整个图像域;像素 \mathbf{x} 处的曲率为 $\kappa = \nabla \cdot [|\nabla u|/|\nabla u|]$. 传导系数和扩展 Lagrange 乘子分别定义如下:

$$G(\mathbf{x}, s) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in D^c, \\ g(s), & \mathbf{x} \in D; \end{cases} \quad (2)$$

$$\lambda_e = \begin{cases} \lambda, & \mathbf{x} \in D^c, \\ 0, & \mathbf{x} \in D, \end{cases} \quad (3)$$

其中: D 为待修复的开区域; D^c 为 D 的补集; λ 与 TV 去噪模型^[11]中的定义相同; g 的作用相当于调节器:可使在大曲率处扩散变强,小曲率处扩散逐渐消失,所以选择 g 为

$$g(s) = s^p, \quad s > 0, \quad p \geq 1. \quad (4)$$

2 数值离散格式

将方程(1)的数值离散分为在修复区域内和修复区域外两步执行.易见,在修复区域外,方程(1)退化为 TV 修复模型:

$$u_t = \nabla \cdot \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + \lambda(u - u^0), \quad \mathbf{x} \in D^c, \quad (5)$$

对该模型的离散时间采用向前差分,空间采用加性算子分裂(AOS)格式.在修复区域内,方程(1)退化为

$$u_t = \nabla \cdot \left[\frac{g(|\kappa|)}{|\nabla u|} \nabla u \right], \quad \mathbf{x} \in D, \quad (6)$$

对该模型的离散采用显示时间步进法^[12].

2.1 加性算子分裂 AOS 离散化格式 记 $x_i = ih, y_j = jh$, 其中 $i, j = 0, 1, \dots, N, Nh = 1$, 这里 h 为空间步长, N 为网格数. 记 $t_n = n\tau (n = 0, 1, \dots)$, τ 为时间步长, $u_{ij}^n = u(x_i, y_j, t_n)$, $u_{ij}^0 = u_0(ih, jh)$. 构造格式如下:

$$u^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{l \in x, y} [I - 2 \frac{\tau}{h} A_l(u^n)]^{-1} [u^n - \tau \lambda^n (u^n - u^0)]. \quad (7)$$

x, y 方向矩阵 $A_l(u^n)$ 的元素分别为

$$a_{ij}(u^n)_x = \begin{cases} 1/R_{ij}^n, & j = i + 1, \\ 1/R_{i-1, j}^n, & j = i - 1, \\ -(1/R_{ij}^n + 1/R_{i-1, j}^n), & j = i, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases} \quad (8)$$

$$a_{ij}(u^n)_y = \begin{cases} 1/S_{ij}^n, & j = i + 1, \\ 1/S_{i-1, j}^n, & j = i - 1, \\ -(1/S_{ij}^n + 1/S_{i-1, j}^n), & j = i, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (9)$$

式中 R, S 及 λ 的表示参见文献[16]. 边界条件:

$$u_{0j}^n = u_{1j}^n, \quad u_{Nj}^n = u_{N-1,j}^n, \quad u_{i0}^n = u_{iN}^n = u_{i,N-1}^n.$$

易见, $a_{ij}(u^n)_x$ 和 $a_{ij}(u^n)_y$ 都是对角占优的三对角矩阵, 可以用追赶法进行求解.

2.2 显式时间步进法离散化格式 在修复区域内将方程(6)简写成如下形式:

$$u_i = -\nabla \cdot \mathbf{j}, \tag{10}$$

其显格式迭代形式:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}^n, \tag{11}$$

对于散度形式 $\nabla \cdot \mathbf{j}$ 采用半格点中心差分:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^n = \frac{\mathbf{j}_{(1/2,0)}^x - \mathbf{j}_{(-1/2,0)}^x}{h} + \frac{\mathbf{j}_{(0,1/2)}^y - \mathbf{j}_{(0,-1/2)}^y}{h}. \tag{12}$$

为计算式(12), 需先计算 $\nabla u_{(i,j)}, \kappa_{(i,j)}$ 在半格点处的值, 以 $(\frac{1}{2}, 0)$ 为例,

$$\nabla u_{(1/2,0)} = \left(\frac{u_{(1,0)} - u_{(0,0)}}{h}, \frac{u_{(0,1)} + u_{(1,1)} - u_{(0,-1)} - u_{(1,-1)}}{4h} \right), \tag{13}$$

$$|\nabla u_{(1/2,0)}| = \sqrt{\left[\frac{u_{(1,0)} - u_{(0,0)}}{h} \right]^2 + \left[\frac{u_{(0,1)} + u_{(1,1)} - u_{(0,-1)} - u_{(1,-1)}}{4h} \right]^2}, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{(1/2,0)} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u_x}{|\nabla u|} \right]_{1/2,0} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{u_y}{|\nabla u|} \right]_{1/2,0} = \frac{[u_x/|\nabla u|]_{(1,0)} - [u_x/|\nabla u|]_{(0,0)}}{h} + \\ &\quad \frac{[u_y/|\nabla u|]_{(0,1)} + [u_y/|\nabla u|]_{(1,1)} - [u_y/|\nabla u|]_{(0,-1)} - [u_y/|\nabla u|]_{(1,-1)}}{4h}. \end{aligned} \tag{15}$$

同理可以计算点 $(-\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}), (0, -\frac{1}{2})$ 的值, 至此, 方程(11)可以求解.

2.3 待修复区域边界处理 因为在修复区域内和修复区域外分别采用两种不同的离散格式, 并且由于待修复区域的不规则性, 因此如何处理待修复区域边界 ∂D 上的点尤为重要. 在数值计算过程中, 可将这些点作为待修复区域内的点进行处理.

3 实验结果及讨论

将本文方法分别应用于缺损信息图像修复和去除文本图像修复中, 取步长 $h=1$ 进行计算, 如图 1 所示, (A) 为缺损信息的原始图像, (B) 为特征函数图像, (C) 为修复结果. 如图 2 所示, (A) 为受文本信息模糊的原始图像, (B) 为特征函数图像, (C) 为去除文本的修复结果. 本文将 CDD 模型的数值离散分为修复区域内和修复区域外两步执行, 在修复区域内采用时间步进法, 而修复区域外利用 AOS 方法进行数值离散, 将这两种方法结合进行数值试验取得了较好的结果.

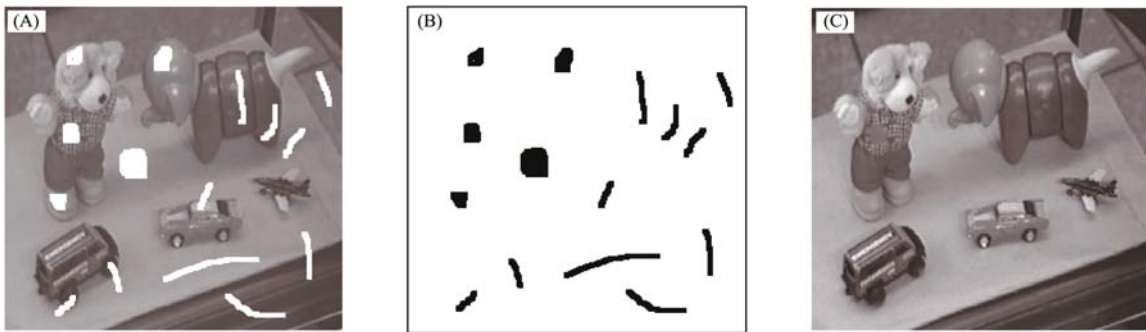


图 1 缺损信息图像修复
Fig. 1 Inpainting for lost information images

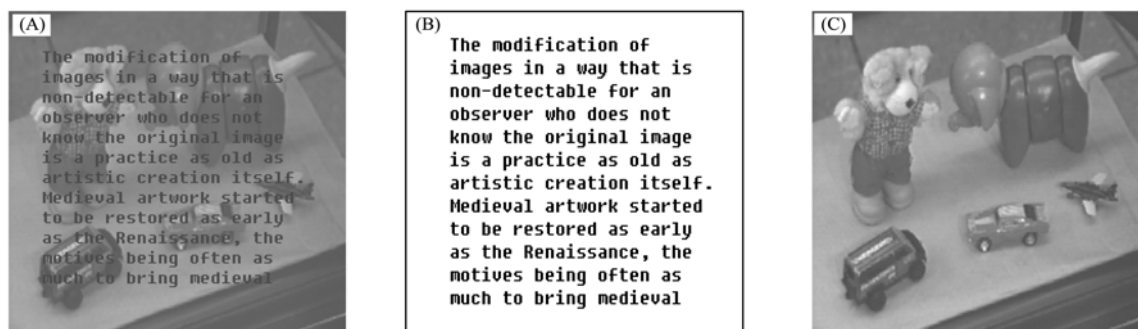


图2 去除文本信息图像修复

Fig.2 Inpainting for removing text images

参 考 文 献

- [1] 吴斌, 吴亚东, 张红英. 基于变分偏微分方程的图像复原技术 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2008: 31-67.
- [2] Sapiro G. Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [3] Aubert G, Kornprobst P. Mathematical Problems in Image Processing [M]. Berlin: Springer, 2002.
- [4] ZHANG Hong-ying, PENG Qi-cong. A Survey on Digital Image Inpainting [J]. Journal of Image and Graphics, 2007, 12(1): 1-10. (张红英, 彭启琮. 数字图像修复技术综述 [J]. 中国图象图形学报, 2007, 12(1): 1-10.)
- [5] WANG Shu-gen, ZHENG Jing-ling. Image Inpainting for Information Lost Area Based on the Texture Matching Approach [J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2004(12): 21-23. (王树根, 郑精灵. 基于纹理匹配的影像缺损信息填充方法 [J]. 测绘通报, 2004(12): 21-23.)
- [6] TANG Feng, YING Yi-ting, WANG Jin, et al. A Novel Texture Synthesis Based Algorithm for Object Removed in Photographs [C]//Proceedings of Ninth Asian Computing Science Conference. Berlin: Springer-Verlag, 2004: 248-258.
- [7] Criminisi A, Pérez P, Toyama K. Region Filling and Object Removal by Exemplar-Based Image Inpainting [J]. IEEE Trans Image Proc, 2004, 13(9): 1200-1212.
- [8] SONG Bing. Topics in Variational PDE Image Segmentation, Inpainting and Denoising [D]: [Ph D Thesis]. Los Angeles: University of California Los Angeles, 2003.
- [9] Bertalmio M, Sapiro G, Caselles V, et al. Image Inpainting [R]. Minneapolis, MN: ECE-University of Minnesota, 1999.
- [10] Chan T F, SHEN Jian-hong. Mathematical Models of Local Nontexture Inpaintings [J]. SIAM J Appl Math, 2002, 62(3): 1019-1043.
- [11] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithm [J]. Physica D, 1992, 60(1/2/3/4): 259-268.
- [12] Chan T F, SHEN Jian-hong. Non-texture Inpainting by Curvature-Driven Diffusions (CDD) [J]. J Visual Comm Image Rep, 2001, 12(4): 436-449.
- [13] Firsov D, Lui S H. Domain Decomposition Methods in Image Denoising Using Gaussian Curvature [J]. J of Comput and Applied Math, 2006, 193(2): 460-473.
- [14] CHANG Qian-shun, Chern I L. Acceleration Methods for Total Variation-Based Image Denoising [J]. SIAM J Sci Comput, 2003, 25(3): 982-994.
- [15] Weickert J, Romeny B M, Viergever M A. Efficient and Reliable Schemes for Nonlinear Diffusion Filtering [J]. IEEE Trans Image Proc, 1998, 7(3): 398-410.
- [16] ZHAO Shu-feng, LUO Hong-wen, HUANG Cheng-qi, et al. Nonlinear Total-Variation Denoising Model Based on AOS Method [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2008, 46(5): 911-914. (赵树峰, 罗宏文, 黄承奇, 等. 基于 AOS 方法的非线性总变差去噪模型 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2008, 46(5): 911-914.)