研究简报

Z-P-S 空间中非线性算子方程解的存在性

王培培, 朱传喜
(南昌大学 数学系, 南昌 330031)

摘要: 在 Z-P-S 空间中, 利用拓扑度方法研究非线性算子方程 $Tx=\mu x$(其中 $\mu\geqslant 1$)和 $Tx=\mu x+p$(其中 $\mu\geqslant 1$)解的存在性, 得到了一些新的定理和推论.
关键词: 紧连续算子; Z-P-S 空间; 拓扑度; 同伦不变性
中图分类号: O211.3; O177.91 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)02-0247-04

Existence for Solution of Nonlinear Operator Equation Problems in Z-P-S Space

WANG Pei-pei, ZHU Chuan-xi
(*Department of Mathematics*, *Nanchang University*, *Nanchang* 330031, *China*)

Abstract: The solution of non-linear operator equation $Tx=\mu x+p\,(\mu\geqslant 1)$ and $Tx=\mu x\,(\mu\geqslant 1)$ in the Z-P-S space was studied via topological degree method and some theorems and deductions were obtained. Meanwhile some important conclusions were improved and generalized.
Key words: compact continuous operator; Z-P-S space; topological degree; homotopy invariance

设 $\mathbb{R}$ 表示一切实数的集合, $\mathbb{R}^+$ 表示一切非负实数的集合, 如果映像 f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 是非减的、左连续的, 且满足:

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} f(t)=0;\qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} f(t)=1.$$

则称其为分布函数.

记 W 为一切分布函数组成的集合.

定义1[1] 如果 E 为一个线性空间, 且映像 F: $E\to W$(记分布函数 $F(x)$ 为 f_x, 又 $f_x(s)$ 表示 f_x 在 $s\in\mathbb{R}$ 时的值)满足如下条件:

(i) $f_x(0)=0$;

(ii) $f_x(s)=H(s)$, $\forall s\in\mathbb{R}$, 当且仅当 $x=0$;

(iii) 对任意实数 $\alpha\neq 0$, $f_{\alpha x}(s)=f_x\left(\dfrac{s}{|\alpha|}\right)$;

(iv) 对任意的 $x,y\in E$ 及一切的 $s_1,s_2\in\mathbb{R}^+$, $f_{x+y}(s_1+s_2)\geqslant\Delta(f_x(s_1),f_y(s_2))$. 则称概率线性赋范空间$(E,F,\Delta)$为 Menger 概率线性赋范空间(简称 M-PN 空间).

定义2[2] 如果 M-PN 空间(E,F,Δ)满足如下条件:

(H_1) E 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的代数, 即 $\forall x,y\in E$, 存在 xy, 使得:

1) E 对乘法封闭, 即 $\forall x,y\in E$, $xy\in E$;

收稿日期: 2010-04-01.
作者简介: 王培培(1986—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事非线性泛函分析的研究, E-mail: wangpeipei215@163.com. 通讯作者: 朱传喜(1956—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事非线性泛函分析的研究, E-mail: chuanxizhu@126.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11071108; 10761007)和江西省自然科学基金(批准号: 0411043; 2007GZS2051).

2) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ 及 $\forall x,y\in E$, $(ax)y=x(ay)=a(xy)$;

(H_2) E 中没有幂零元素, 即 $\forall x,y\in E$, $n\in\mathbb{N}$, 有 $x^n=0\Leftrightarrow x=0$.

则称 E 为 Z-P-S 空间.

显然, 由 E 为实数域上的代数可知:

3) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ 及 $\forall x,y\in E$, $ax\cdot\lambda y=(a\lambda)(x\cdot y)$.

本文所涉及的相关概念可参见文献[3-8].

定理1 设(E,F,Δ)为 Z-P-S 空间, D 是 E 中的一个有界开子集, $\Delta(t,t)\geqslant t$, $t\in[0,1]$. 设 T: $\overline{D}\to E$是一紧连续算子, $\theta\in D$. 若 T 满足如下条件:

$$f_{(Tx-(1-\lambda)x)^n}(t)<f_{(Tx)^n-(1-\lambda)x^n}(t),\quad n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\partial D,\quad 0\leqslant\lambda<1,\quad t>0. \tag{1}$$

则非线性方程 $Tx=\mu x$(其中 $\mu\geqslant 1$)在 $\overline{D}$ 中必有解.

证明: 可设对 $\forall x\in\partial D$ 及 $\mu\geqslant 1$, 均有 $Tx\neq\mu x$(否则定理获证). 由已知条件知 T: $\overline{D}\to E$ 是一紧连续算子. 令$h_s(x)=x-(s/\mu)Tx$, 其中 $x\in\overline{D}$, $s\in[0,1]$, $\mu\geqslant 1$.

下面证明 $\theta\notin h_s(\partial D)$, $s\in[0,1]$. 事实上, 若 $\theta\in h_s(\partial D)$, 则存在 $x_0\in\partial D$, $s\in[0,1]$, 使得 $\theta=x_0-(s_0/\mu)Tx_0$, 即 $x_0=(s_0/\mu)Tx_0$, 显然 $s_0\neq 0$(否则有 $x_0=\theta\notin D$ 与 $x_0\in\partial D$ 矛盾), 又 $s_0\neq 1$(否则 $x_0=(1/\mu)Tx_0$, 即 $Tx_0=\mu x_0$, 其中 $x_0\in\partial D$, $\mu\geqslant 1$. 而这与对 $\forall x\in\partial D$, $\mu\geqslant 1$, 都有 $Tx\neq\mu x$ 矛盾), 故有 $s_0\in(0,1)$. 由式(1)得

$$f_{(Tx_0-(1-\lambda)x_0)^n}(t)<f_{(Tx_0)^n-(1-\lambda)x_0^n}(t), \tag{2}$$

其中: $x_0\in\partial D$; $n\in\mathbb{N}$; $t>0$.

将 $Tx_0=(\mu/s_0)x_0$代入式(2)得$f_{[\mu/s_0-(1-\lambda)]^n x_0^n}(t)<f_{[(\mu/s_0)^n-(1-\lambda)]x_0^n}(t)$, 从而有

$$f_{x_0^n}\left(\frac{t}{[\mu/s_0-(1-\lambda)]^n}\right)<f_{x_0^n}\left(\frac{t}{(\mu/s_0)^n-(1-\lambda)}\right), \tag{3}$$

其中: $x_0\in\partial D$; $\mu\geqslant 1$; $0\leqslant\lambda<1$; $t>0$; $n\in\mathbb{N}$; $s_0\in(0,1)$.

由于 $x_0\in\partial D$, $\theta\in D$, 故 $x_0\neq\theta$. 又由于(E,F,Δ)为 Z-P-S 空间, 于是 $x_0^n\neq\theta$, 同时由$f_{x^n}\in W$ 知f_{x^n}是非减的, 由 $t>0$ 及式(3)易得$[\mu/s_0-(1-\lambda)]^n>(\mu/s_0)^n-(1-\lambda)$. 令 $\mu/s_0=y$, 则有

$$[y-(1-\lambda)]^n>y^n-(1-\lambda),$$

而这显然与当 $y>1$, $0\leqslant\lambda<1$, $\alpha>1$ 时不等式$[y-(1-\lambda)]^\alpha<y^\alpha-(1-\lambda)$矛盾. 从而有 $\theta\notin h_s(\partial D)$, $s\in[0,1]$. 因此, 由文献[1]的拓扑度同伦不变性得 $\mathrm{Deg}(I-T/\mu,D,\theta)=\mathrm{Deg}(I,D,\theta)=1$, 再由拓扑度的可解性知方程$(I-T/\mu)x=\theta$ 在 D 中必有解. 故存在 $\bar{x}\in D$, 使得$(I-T/\mu)\bar{x}=\theta$, 即 $T\bar{x}=\mu\bar{x}$, $\bar{x}\in D$. 表明方程 $Tx=\mu x$(其中 $\mu\geqslant 1$)在 D 中必有解, 从而非线性方程 $Tx=\mu x$(其中 $\mu\geqslant 1$)在 $\overline{D}$ 中必有解.

定理2 设(E,F,Δ)为 Z-P-S 空间, D 是 E 中的一个有界开子集, $\Delta(t,t)\geqslant t$, $t\in[0,1]$. 设 T: $\overline{D}\to E$是一紧连续算子, $\theta\in D$. 若 T 满足如下条件:

$$f_{\lambda x^n+(1-\lambda)(Tx)^n}(t)\leqslant f_{(Tx)^n}(t),\quad \forall x\in\partial D,\quad 0<\lambda<1,\quad n\in\mathbb{N},\quad t>0. \tag{4}$$

则非线性方程 $Tx=\mu x$(其中 $\mu\geqslant 1$)在 $\overline{D}$ 中必有解.

证明: 可设对 $\forall x\in\partial D$ 及 $\mu\geqslant 1$, 均有 $Tx\neq\mu x$. 由已知条件知 T: $\overline{D}\to E$ 为一紧连续算子. 令 $h_s(x)=x-(s/\mu)Tx$, 其中: $x\in\overline{D}$; $s\in[0,1]$; $\mu\geqslant 1$.

下面证明 $\theta\notin h_s(\partial D)$, $s\in[0,1]$. 事实上, 若 $\theta\in h_s(\partial D)$, 则存在 $x_0\in\partial D$, $s\in[0,1]$, 使得 $\theta=x_0-(s_0/\mu)Tx_0$, 即 $x_0=(s_0/\mu)Tx_0$, 显然 $s_0\neq 0$(否则有 $x_0=\theta\notin D$ 与 $x_0\in\partial D$ 矛盾), 又 $s_0\neq 1$(否则 $x_0=Tx_0/\mu$, 即 $Tx_0=\mu x_0$, 其中 $x_0\in\partial D$, $\mu\geqslant 1$. 而这与对 $\forall x\in\partial D$, $\mu\geqslant 1$, 都有 $Tx\neq\mu x$ 矛盾), 故有 $s_0\in(0,1)$. 由式(4)得

$$f_{\lambda x_0^n+(1-\lambda)(Tx_0)^n}(t)\leqslant f_{(Tx_0)^n}(t), \tag{5}$$

其中: $x_0\in\partial D$; $n\in N$; $0<\lambda<1$; $t>0$.

将 $Tx_0=\mu x_0/s_0$ 代入式(5)得$f_{\lambda x_0^n+(1-\lambda)(\mu x_0/s_0)^n}(t)\leqslant f_{(\mu x_0/s_0)^n}(t)$, 即有

$$f_{[\lambda+(1-\lambda)(\mu/s_0)^n](x_0)^n}(t)\leqslant f_{(\mu/s_0)^n x_0^n}(t),$$

从而有

$$f_{(x_0)^n}\left(\frac{1}{\lambda+(1-\lambda)(\mu/s_0)^n}\right)\leqslant f_{x_0^n}\left(\frac{1}{(\mu/s_0)^n}\right),\tag{6}$$

其中：$x_0\in\partial D$；$\mu\geqslant1$；$0<\lambda<1$；$t>0$；$n\in\mathbb{N}$；$s_0\in(0,1)$.

由于 $x_0\in\partial D$，$\theta\in D$，故 $x_0\neq\theta$. 又由于(E,F,Δ)为 Z-P-S 空间，于是 $x_0^n\neq\theta$，同时又由 $f_{x^n}\in W$ 知 f_{x^n} 是非减的，且 $t>0$，则由式(6)易得 $\lambda+(1-\lambda)(\mu/s_0)^n\geqslant(\mu/s_0)^n$，即 $\mu^n/s_0^n\leqslant1$，因此 $\mu^n\leqslant s_0^n$，又因为 $\mu\geqslant1$，$s_0\in(0,1)$，故矛盾. 从而有 $\theta\notin h_s(\partial D)$，$s\in[0,1]$. 因此，由文献[1]拓扑度的同伦不变性得 $\mathrm{Deg}(I-T/\mu,D,\theta)=\mathrm{Deg}(I,D,\theta)=1$，再由拓扑度的可解性知方程$(I-T/\mu)x=\theta$ 在 D 中必有解. 故存在 $\bar{x}\in D$，使得$(I-T/\mu)\bar{x}=\theta$，即 $T\bar{x}=\mu\bar{x}$，$\bar{x}\in D$. 表明方程 $Tx=\mu x$(其中 $\mu\geqslant1$)在 D 中必有解，从而非线性方程 $Tx=\mu x$(其中 $\mu\geqslant1$)在 $\overline{D}$ 中必有解.

定理 3　设(E,F,Δ)为 Z-P-S 空间，D 是 E 中的一个有界开子集，$\Delta(t,t)\geqslant t$，$t\in[0,1]$. 设 T：$\overline{D}\to E$是一紧连续算子，$\theta\in D$. 再设 $p\in E$ 且对 $\forall x\in\partial D$，均有 $Tx\neq p$. 若 T 满足如下条件：

$$f_{(Tx-p)^n}(t)>f_{k(\alpha,\beta)x^n}(t),\quad\forall x\in\partial D,\quad n\in\mathbb{N},\quad t>0.\tag{7}$$

其中 $k(\alpha,\beta)$：$(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to(0,1)$是一个函数. 则非线性方程 $Tx=\mu x+p$(其中 $\mu\geqslant1$)在 $\overline{D}$ 中必有解.

证明：可设对 $\forall x\in\partial D$ 及 $\mu\geqslant1$ 均有 $Tx\neq\mu x+p$. 设 A 为 $\overline{D}$ 上的一个常值算子，即对 $\forall x\in\overline{D}$，均有 $Ax=p$. 由已知条件 T：$\overline{D}\to E$ 是一紧连续算子知，当 $\mu\geqslant1$ 时，$(T-A)/\mu$：$\overline{D}\to E$ 也是紧连续的.

令 $h_s(x)=x-(s/\mu)(Tx-Ax)$，即 $h_s(x)=x-(s/\mu)(Tx-p)$，其中：$x\in\overline{D}$；$s\in[0,1]$；$\mu\geqslant1$.

下面证明 $\theta\notin h_s(\partial D)$，$s\in[0,1]$. 事实上，若 $\theta\in h_s(\partial D)$，则存在 $x_0\in\partial D$，$s\in[0,1]$，使得 $\theta=x_0-(s_0/\mu)(Tx_0-p)$，即 $x_0=(s_0/\mu)(Tx_0-p)$，显然 $s_0\neq0$，又 $s_0\neq1$，故 $s_0\in(0,1)$. 由式(7)得

$$f_{(Tx_0-p)^n}(t)>f_{k(\alpha,\beta)x_0^n}(t),\tag{8}$$

其中：$t>0$；$n\in\mathbb{N}$；$x_0\in\partial D$；$k(\alpha,\beta)$：$(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to(0,1)$是一个函数.

将 $x_0=(s_0/\mu)(Tx_0-p)$代入式(8)得 $f_{(Tx_0-p)^n}(t)>f_{k(\alpha,\beta)(s_0^n/\mu^n)(Tx_0-p)^n}(t)$，即

$$f_{(Tx_0-p)^n}(t)>f_{(Tx_0-p)^n}\left(\frac{\mu^n}{k(\alpha,\beta)s_0^n}t\right),\tag{9}$$

其中：$x_0\in\partial D$；$\mu\geqslant1$；$s_0\in(0,1)$；$t>0$；$n\in\mathbb{N}$；$k(\alpha,\beta)$：$(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to(0,1)$是一个函数.

由于 $x_0\in\partial D$，故由已知条件知 $Tx_0\neq p$. 从而 $Tx_0-p\neq\theta$. 又由于(E,F,Δ)为 Z-P-S 空间，于是$(Tx_0-p)^n\neq\theta$，同时又由 $f_{(Tx_0-p)^n}\in W$ 知 $f_{(Tx_0-p)^n}$是非减的，且 $t>0$，故由式(9)易得 $\mu^n<k(\alpha,\beta)s_0^n$，而这显然与 $\mu^n>k(\alpha,\beta)s_0^n$ 矛盾(因为 $s_0\in(0,1)$，$k(\alpha,\beta)\in(0,1)$，$\mu\geqslant1$，则 $\mu^n>k(\alpha,\beta)s_0^n$)，因此 $\theta\notin h_s(\partial D)$，$s\in[0,1]$. 从而由文献[1]拓扑度的同伦不变性得 $\mathrm{Deg}(I-(T-A)/\mu,D,\theta)=\mathrm{Deg}(I,D,\theta)=1$，再由拓扑度的可解性知方程$[I-(T-A)/\mu]x=\theta$ 在 D 中必有解. 故存在 $\bar{x}\in D$，使得$[I-(T-A)/\mu]\bar{x}=\theta$，即 $\bar{x}-(T\bar{x}-p)/\mu=\theta$，即 $T\bar{x}=\mu\bar{x}+p$，表明方程 $Tx=\mu x+p$(其中 $\mu\geqslant1$)在 D 中必有解，从而非线性方程 $Tx=\mu x+p$(其中 $\mu\geqslant1$)在 $\overline{D}$ 中必有解.

推论 1　设(E,F,Δ)为 Z-P-S 空间，D 是 E 中的一个有界开子集，$\Delta(t,t)\geqslant t$，$t\in[0,1]$. 设 T：$\overline{D}\to E$是一紧连续算子，$\theta\in D$. 再设 $p\in E$ 且对 $\forall x\in\partial D$，均有 $Tx\neq p$. 若 T 满足如下条件：

$$f_{(Tx_0-p)^n}(t)>f_{\alpha x^n}(t),\quad n\in\mathbb{N},\quad\forall x\in\partial D,\quad t>0,\quad\alpha\in(0,1],\tag{10}$$

则非线性方程 $Tx=\mu x+p$(其中 $\mu\geqslant1$)在 $\overline{D}$ 中必有解.

定理 4　设(E,F,Δ)为 Z-P-S 空间，D 是 E 中的一个有界开子集，$\Delta(t,t)\geqslant t$，$t\in[0,1]$. 设 T：$\overline{D}\to E$为一个紧连续算子，$\theta\in D$. 再设 $p\in E$ 且对 $\forall x\in\partial D$，均有 $Tx\neq p$. 设 G 为定义在 $\overline{D}$ 上的非线性泛函，即 G：$\overline{D}\to\mathbb{R}$，且对 $\forall x\in\partial D$，均有 $G(x)\geqslant0$. 若 T 满足如下条件：

$$f_{(G(x)+r)(Tx-p)^n}(t)>f_{\alpha x^n}(t),\quad\forall x\in\partial D,\quad\alpha\in(0,1],\quad t>0,\quad r\geqslant1,\quad n\in\mathbb{N}.\tag{11}$$

则非线性方程 $Tx=\mu x+p$(其中 $\mu\geqslant1$)在 $\overline{D}$ 中必有解.

证明：可设对 $\forall x\in\partial D$，$\mu\geqslant1$，均有 $Tx\neq\mu x+p$. 设 A 为 $\overline{D}$ 上的一个常值算子，即对 $\forall x\in\overline{D}$，均有 $Ax=p$. 由已知条件 T：$\overline{D}\to E$ 是一紧连续算子知，当 $\mu\geqslant1$ 时，$(T-A)/\mu$：$\overline{D}\to E$ 也是紧连续的.

令 $h_s(x)=x-(s/\mu)(Tx-Ax)$，即 $h_s(x)=x-(s/\mu)(Tx-p)$，其中：$x\in\overline{D}$；$s\in[0,1]$；$\mu\geqslant 1$.

下面证明 $\theta\notin h_s(\partial D)$，$s\in[0,1]$. 事实上，若 $\theta\in h_s(\partial D)$，则存在 $x_0\in\partial D$，$s\in[0,1]$，使得 $\theta=x_0-(s_0/\mu)(Tx_0-p)$，即 $x_0=(s_0/\mu)(Tx_0-p)$，显然 $s_0\neq 0$，又 $s_0\neq 1$，故 $s_0\in(0,1)$. 由式(11)得

$$f_{(G(x_0)+r)(Tx_0-p)^n}(t)>f_{\alpha x_0^n}(t),\tag{12}$$

其中：$x_0\in\partial D$；$\alpha\in(0,1]$；$t>0$；$r\geqslant 1$；$n\in\mathbb{N}$.

将 $x_0=(s_0/\mu)(Tx_0-p)$代入式(12)可得$f_{(G(x_0)+r)(Tx_0-p)^n}(t)>f_{(s_0^n\alpha/\mu^n)(Tx_0-p)^n}(t)$，即

$$f_{(Tx_0-p)^n}\left(\frac{t}{G(x_0)+r}\right)>f_{(Tx_0-p)^n}\left(\frac{\mu^n t}{s_0^n\alpha}\right),\tag{13}$$

其中：$x_0\in\partial D$；$\alpha\in(0,1]$；$t>0$；$s_0\in(0,1)$；$r\geqslant 1$；$\mu\geqslant 1$；$n\in\mathbb{N}$.

由于 $x_0\in\partial D$，故由已知条件知 $Tx_0\neq p$，从而 $Tx_0-p\neq\theta$. 又由于(E,F,Δ)为 Z-P-S 空间，于是$(Tx_0-p)^n\neq\theta$，同时又由$f_{(Tx_0-p)^n}\in W$知$f_{(Tx_0-p)^n}$是非减的，且 $t>0$，故由式(13)易得

$$\frac{1}{G(x_0)+r}>\frac{\mu^n}{s_0^n\alpha}.\tag{14}$$

由于对 $\forall x\in\partial D$，均有 $G(x)\geqslant 0$，又因为 $x_0\in\partial D$，$r\geqslant 1$，故有 $G(x_0)+r>1$. 即$\dfrac{1}{G(x_0)+r}\leqslant 1$，又由于 $\alpha\in(0,1]$，$s_0\in(0,1)$，$\mu\geqslant 1$，故有$\dfrac{\mu^n}{s_0^n\alpha}\geqslant 1$，从而有$\dfrac{1}{G(x_0)+r}\leqslant\dfrac{\mu^n}{s_0^n\alpha}$，这与式(14)矛盾. 所以 $\theta\notin h_s(\partial D)$，$s\in[0,1]$. 因此，由文献[1]拓扑度的同伦不变性得

$$\mathrm{Deg}(I-(T-A)/\mu,D,\theta)=\mathrm{Deg}(I,D,\theta)=1,$$

再由拓扑度的可解性知方程$[I-(T-A)/\mu]x=\theta$在 D 中必有解. 故存在 $\bar{x}\in D$，使得$[I-(T-A)/\mu]\bar{x}=\theta$，即 $\bar{x}-(T\bar{x}-p)/\mu=\theta$，也即 $T\bar{x}=\mu\bar{x}+p$，表明方程 $Tx=\mu x+p$(其中 $\mu\geqslant 1$)在 D 中必有解，从而非线性方程 $Tx=\mu x+p$(其中 $\mu\geqslant 1$)在 $\overline{D}$ 中必有解.

参 考 文 献

[1] ZHANG Shi-sheng, CHEN Yu-qing. Topological Degree Theory and Fixed Point Theorems in Probabilistic Metric Space [J]. Appl Math and Mech, 1989, 10(6): 495-505.

[2] ZHU Chuan-xi, ZHU Tian. Some Problems of Probabilistic Analysis in the Z-P-S Space [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2006, 26(1): 1-4. (朱传喜, 朱天. Z-P-S空间中的若干概率分析问题[J]. 系统科学与数学, 2006, 26(1): 1-4.)

[3] YE Mei-yan, ZHU Chuan-xi, GUO Ling. Solution of Operator Equation $Tx=\mu x+p$ ($\mu\geqslant 1$) in Menger PN Space [J]. Acta Analysis Functionalis Applicata, 2005, 7(3): 269-272. (叶梅燕, 朱传喜, 郭玲. 关于M-PN空间中算子方程 $Tx=\mu x+p(\mu\geqslant 1)$的解[J]. 应用泛函分析学报, 2005, 7(3): 269-272.)

[4] HUANG Xiao-qin, WANG Mian-sen, ZHU Chuan-xi. The Topological Degree of a Proper Mapping in the Menger PN Space (Ⅰ) [J]. Bull Austral Math Soc, 2006, 73(2): 161-168.

[5] ZHU Chuan-xi, ZHU Tian. Intrinsic Value and Intrinsic Element in the Menger PN Space [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2005, 28(4): 752-756. (朱传喜, 朱天. Menger PN空间的固有值与固有元[J]. 应用数学学报, 2005, 28(4): 752-756.)

[6] ZHU Chuan-xi. Some New Fixed Point Theorems in Probabilistic Metric Space [J]. Appl Math and Mech, 1995, 16(2): 179-185.

[7] ZHU Chuan-xi, XU Zong-ben. Inequalities and Solution of an Operator Equation [J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21(6): 607-611.

[8] Chang S S, Cho Y J, Kang S M. Probabilistic Metric Spaces and Nonlinear Operator Theory [M]. Chengdu: Sichuan University Press, 1994.