第49卷 第2期　　吉林大学学报(理学版)　　Vol. 49 No. 2
2011年3月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　Mar 2011

研究简报

改进细胞模型整体解的存在性

柯媛元[1,2], 杨欣欣[2], 王泽佳[2]
(1. 中国人民大学 信息学院, 北京 100872; 2. 吉林大学 数学学院, 长春 130012)

摘要: 利用 Moser 迭代技巧, 研究改进的 Potts 模型解的全局存在性. 改进的模型不仅完整描述了细胞与细胞分泌物间的关系对趋化运动的影响, 而且考虑了细胞摄取物对趋化运动的影响.

关键词: 反应扩散; 非线性; 整体解; 存在性
中图分类号: O175.8　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-5489(2011)02-0243-04

Existence of Global Solutions of Modifed Cellular Model

KE Yuan-yuan[1,2], YANG Xin-xin[2], WANG Ze-jia[2]
(1. *School of Information, Renmin University of China, Beijing* 100872, *China*;
2. *College of Mathematics, Jilin University, Changchun* 130012, *China*)

Abstract: The existence of global solutions of the modified cellular Potts model (CPM) was investigated via the Moser's iteration. We can use the modified cellular Potts model to describe the relationship between the cell and the cell secretion the effect of it on chemotaxis. We can also use the new model to consider the impact of cell nutrients on chemotaxis.

Key words: reaction diffusion; nonlinear; global solutions; existence

考虑方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla[\Gamma(u)\nabla u] - \nabla[u\chi(u,v)\nabla v] + f(u,v,w), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \nabla[d(v)\nabla v] + g(u,v,w), \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \nabla[s(w)\nabla w] - h(u,v,w), \\ (u(0,x),v(0,x),w(0,x)) = (u_0(x),v_0(x),w_0(x)), \quad \text{在 } \Omega \text{ 上}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x) = \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x) = \dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x) = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为边界光滑的有界区域; u,v,w 分别表示细胞密度、细胞分泌物及摄取物的浓度; 非负函数 χ 描述细胞对其分泌物的趋化敏感性; f,g,h 分别表示细胞的增殖、细胞对分泌物的分泌速率及细胞对摄取物的消耗速率.

自然界中存在大量的趋化运动, 目前已有许多研究结果[1-3]. 一般地, 趋化运动包括细胞的增长、

收稿日期: 2009-12-28.
作者简介: 柯媛元(1978—), 女, 蒙古族, 博士, 副教授, 从事偏微分方程的研究, E-mail: keyy@jlu.edu.cn. 通讯作者: 王泽佳(1979—), 女, 汉族, 博士, 副教授, 从事偏微分方程的研究, E-mai: matwzj@jlu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10801061; J0630104)、中国人民大学科研基金中央高校基本科研业务费专项资助项目(批准号: 2010030171)和吉林大学基本科研业务费资助项目.

细胞对分泌物的释放及其对营养物质的消耗三要素. 经典 Keller-Segel 模型[4-5]研究了前两个要素之间的关系. 文献[2]认为细胞分泌物的产生速率与外在的细胞摄取物浓度联系密切, 正是由于细胞摄取物的消耗才使细胞产生能刺激细胞进行趋化运动的细胞分泌物. 文献[6]提出的细胞 Potts 模型(CPM)是对 Keller-Segel 模型的一般化, 得到了模型整体解的存在性. 本文基于文献[7], 对 CPM 模型进行改进. 与文献[6]的模型相比, 本文建立的新模型引入了反映细胞消耗物 w 浓度的变化方程:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\nabla[s(w)\nabla w]-h(u,v,w),$$

其中: $\nabla[s(w)\nabla w]$表示细胞消耗物的扩散速率; $h(u,v,w)$表示细胞对 w 的摄取速率. 同时由于新变量的引入, 还将描述细胞增殖速率的函数$f(u,v)$修正为$f(u,v,w)$, 说明细胞的增殖速率不仅与细胞总数和细胞分泌物有关, 而且还与细胞外在环境即细胞摄取物的浓度有关; 将表达细胞分泌物浓度变化的 $g(u,v)$修正为 $g(u,v,w)$, 因为文献[2]的实验表明, 细胞分泌物的产生速率与外在的细胞摄取物浓度有重要联系.

假设条件:

(H_1) 设 $D=[0,1]\times[0,\infty)$, $\chi\in C^2(D;[0,\infty))$, 且对于任意的 $v\geqslant 0$, $\chi(0,v)=0$.

(H_2) $f\in C^2(D\times[0,\infty);\mathbb{R})$, 对于任意的$(u,v,w)\in D\times[0,\infty)$,

$$f(u,v,w)\leqslant M_f(1-u),\qquad f(0,v,w)\geqslant 0,$$

其中: $M_f\geqslant 0$; $g\in C^2(D\times[0,\infty);\mathbb{R})$. 对于任意的 $v>V>0$, $g(u,v,w)<0$, 当 $u\in[0,1]$, $w\in[0,\infty)$时,

$$g(u,0,w)\geqslant 0;\qquad h\in C^2(D\times[0,\infty);\mathbb{R}).$$

对于任意的$(u,v,w)\in D\times[0,\infty)$, $\|h\|<H$(H 是大于 0 的常数), 且 $h(u,v,0)=0$.

(H_3) $u_0,v_0,w_0\in C^{2+\eta}(\overline{\Omega})$, $\eta\in(0,1)$. 对于任意的 $x\in\overline{\Omega}$,

$$0\leqslant u_0(x)<1,\quad v_0(x)\geqslant 0,\quad w_0(x)\geqslant 0,$$

且对所有的 $x\in\partial\Omega$,

$$\frac{\partial u_0}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x)=\frac{\partial v_0}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x)=\frac{\partial w_0}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x)=0.$$

(H_4) $\Gamma\in C^2([0,1);(0,\infty))$, 且 $\Gamma(u)\geqslant\dfrac{K}{(1-u)^{\alpha}}$, K 为正常数, $\alpha>2$. $d,s\in C^2([0,\infty);[M_1,M_2])$, $0<M_1<M_2<\infty$.

本文主要结果如下:

定理1 假设(H_1)~(H_4)成立. 则方程组(1)存在唯一解(u, v, w), 且$(u,v,w)\in C^{1+\eta/2,2+\eta}([0,\infty)\times\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$. 进一步, 存在常数 c_v, 使得

$$0\leqslant u(t,x)<1,\quad 0\leqslant v(t,x)\leqslant c_v,\quad w(t,x)\geqslant 0,\quad x\in\overline{\Omega},\quad t>0.$$

引理1 假设(H_1)~(H_4)成立, 则:

(i) 存在依赖于初值(u_0,v_0,w_0)的正常数 T_0, 使得方程组(1)在 $C^{1+\eta/2,\,2+\eta}([0,T_0)\times\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$上有唯一最大解$(u,v,w)$, 其中 $u(t,x)\geqslant 0$, $v(t,x)\geqslant 0$, $w(t,x)\geqslant 0$;

(ii) 如果对任意的 $t>0$, u,v,w 有界且 $u\neq 1$, 则 $T_0=\infty$, 即由(i)得到的方程组(1)的解是整体解.

证明: (i) 设 $J=(u,v,w)$. 方程组(1)可以改写为以下形式:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J}{\partial t}=\nabla(\boldsymbol{A}(J)\nabla J)+\boldsymbol{F}(J),\\ J(0,\cdot)=(u_0,v_0,w_0),\quad \text{在 }\Omega\text{ 上},\\ [\Gamma(u)\nabla u-\chi(u,v)\nabla v]\cdot\boldsymbol{\nu}=0,\quad \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\\ [d(v)\nabla v]\cdot\boldsymbol{\nu}=0,\quad \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\\ [s(w)\nabla w]\cdot\boldsymbol{\nu}=0,\quad \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\end{cases}\tag{2}$$

其中：

$$
\boldsymbol{A}(J)=\begin{pmatrix}\Gamma(u) & -\chi(u,v) & 0\\ 0 & d(v) & 0\\ 0 & 0 & s(w)\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{F}(J)=\begin{pmatrix}f(u,v,w)\\ g(u,v,w)\\ -h(u,v,w)\end{pmatrix}.
$$

由于存在 $\delta>0$，使得初值条件$u_0\leqslant 1-\delta$，且 $\boldsymbol{A}(J)$在 $t=0$ 时刻的特征值为正，因此系统(2)是标准的抛物型方程组. 根据文献[8]中定理 7.3 可知，系统(2)存在局部解，即存在 $T_0>0$，使得

$$
(u,v,w)\in C([0,T_0)\times\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)\cap C^{1,2}((0,T_0)\times\overline{\Omega};\mathbb{R}^3).
$$

由假设$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_4)$，并利用文献[9]中定理 15.1 知，对所有的 $x\in\overline{\Omega}$，$u\geqslant 0$，$v\geqslant 0$，$w\geqslant 0$.

（ii）由于系统(2)是上三角系统，故由文献[10]中定理 5.2 可知结论成立.

为叙述简单，考虑如下方程组：

$$
\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\nabla[\Gamma(u)\nabla u]-\nabla\cdot\boldsymbol{b}(t,x)+f(u,t,x), & 在(0,T)\times\Omega内,\\ u(0,x)=u_0(x), & 在\Omega上,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}=0,\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu}=0, & 在\partial\Omega上,\end{cases}\tag{3}
$$

其中：$\boldsymbol{b}(t,x)\in L^\infty((0,\infty)\times\Omega)$是一个给定的函数；$\boldsymbol{\nu}$ 为单位外法向量.

事实上，方程组(3)中的 u 与方程组(1)中的 u 性质相同.

引理 2　假设当 $x\in\overline{\Omega}$ 时，$0\leqslant u_0(x)<1$，并假设 $\|\boldsymbol{b}\|_{L^\infty((0,\infty)\times\Omega)}=M_b$，且当 $u\in[0,1]$时，

$$
\|f(u,\cdot,\cdot)\|_{L^\infty((0,\infty)\times\Omega)}\leqslant M_f(1-u).
$$

若 u 是方程组(3)的解，且对任意的$(t,x)\in Q_T=[0,T)\times\overline{\Omega}$，$0\leqslant u(t,x)<1$，则对任意的 $T>0$，存在仅依赖于 M_b，$\delta=\|1-u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$和 T 的常数 $\delta_T>0$，使得

$$
u(t,x)<1-\delta_T,\qquad (t,x)\in Q_T.\tag{4}
$$

证明：将式(3)的第一式两边同时乘以$(1-u)^{-p-1}$，并积分得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(1-u)^{-p}\mathrm{d}x=&p\int_\Omega(1-u)^{-p-1}u_t\mathrm{d}x=\\
&p\int_\Omega(1-u)^{-p-1}\nabla[\Gamma(u)\nabla u-b]\mathrm{d}x+\\
&p\int_\Omega(1-u)^{-p-1}g(u,t,x)\mathrm{d}x=\\
&-p(1+p)\int_\Omega\left(\Gamma(u)(1-u)^{-(p+2)}|\nabla u|^2-\frac{\nabla u\cdot b}{(1-u)^{p+2}}\right)\mathrm{d}x+\\
&\int_\Omega p\,\frac{g(u,t,x)}{(1-u)^{p+1}}\mathrm{d}x\leqslant\\
&-p(1+p)\int_\Omega\left(\frac{|\nabla u|^2}{(1-u)^{-(\alpha+p+2)}}-\frac{\nabla u\cdot b}{(1-u)^{p+2}}\right)\mathrm{d}x+\\
&p\int_\Omega M_g(1-u)^{-p}\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{5}
$$

设 $\boldsymbol{\omega}_p=(1-u)^{-(\alpha+p)/2}$，将式(5)化简得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(1-u)^{-p}\mathrm{d}x-p\int_\Omega M_g(1-u)^{-p}\mathrm{d}x\leqslant\\
&\qquad\frac{p(1+p)}{\alpha+p}\left(-\frac{2}{\alpha+p}\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{\omega}_p|^2\mathrm{d}x+\frac{M_b^2(\alpha+p)}{2}\int_\Omega\frac{1}{(1-u)^{(p+2-\alpha)}}\mathrm{d}x\right).
\end{aligned}
$$

令 $M^2=M_b^2+M_g$，可得

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(1-u)^{-p}\mathrm{d}x\leqslant\frac{p(1+p)}{\alpha+p}\left(-\frac{2}{\alpha+p}\int_\Omega|\nabla\boldsymbol{\omega}_p|^2\mathrm{d}x+\frac{M^2(\alpha+p)}{2}\int_\Omega\frac{1}{(1-u)^p}\mathrm{d}x\right).
$$

根据文献[11]引理2.4证明过程中的第2,3步可以证明$\frac{1}{1-u}\in L^{\infty}(\Omega)$. 因此, 存在常数$\delta_T>0$, 使得式(4)成立.

下面证明定理1.

由引理1中(i)可知, 方程组(1)存在最大解$(u,v,w)\in C^{1+\eta/2,2+\eta}([0,T_0)\times\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$, 其中$T_0>0$. 为了证明整体解的存在性, 只需验证引理1中的条件(ii). 由(H_4)及引理2可知, 存在常数$\delta_T>0$, 使得式(4)成立. 将w视为u,v的函数, 利用抛物型方程的L^p估计方法及条件(H_2)可得

$$\| w \|_{W_p^{2,1}} \leqslant C(\| H \|_{L^p(Q_T)} + \| w \|_{L^p(Q_T)}) \leqslant \overline{C}_{p,T},$$

其中: $C_{p,T}$是仅依赖于$p(\geqslant1)$,T的连续模; $\overline{C}_{p,T}$是仅依赖于$p(\geqslant1)$,T的常数. 因此, 在任意有限时间内w是有限的. 将v视为u,w的函数, 由w在任意有限时间的有界性及(H_2), 并利用抛物型方程的L^p估计方法, 同理可证在任意有限时间内v是有界的. 综上, 由引理1中(ii)知方程组(1)存在全局解.

参考文献

[1] Perthame B. PDE Models for Chemotactic Movements: Parabolic, Hyperbolic and Kinetic [J]. Application of Mathematics, 2004, 49(6): 539-564.

[2] Brenner M P, Levitov L S, Budrene E O. Physical Mechanisms for Chemotactic Pattern Formation by Bacteria [J]. Biophysical Journal, 1998, 74(4): 1677-1693.

[3] Wrzosek D. Global Attractor for a Chemotaxis Model with Prevention of Overcrowding [J]. Nonlinear Analysis, 2004, 59(8): 1293-1310.

[4] Alt W. Biased Random Walk Models for Chemotaxis and Related Diffusion Approximations [J]. J Math Biol, 1980, 9(2): 147-177.

[5] Othmer H G, Stevens A. Aggregation, Blowup, and Collapse: The ABC's of Taxis in Reinforced Random Walks [J]. SIAM J Appl Math, 1997, 57(4): 1044-1081.

[6] Alber M, Gejji R, Kazmierczak B. Existence of Global Solutions of a Macroscopic Model of Cellular Motion in a Chemotactic Field [J]. Appl Math Lett, 2009, 22(11): 1645-1648.

[7] Tyson R, Stern L G, Veque R J, Le. Fractional Step Methods Applied to a Chemotaxis Model [J]. J Math Biol, 2000, 41(5): 455-475.

[8] Amann H. Dynamic Theory of Quasilinear Parabolic Equations Ⅱ: Reaction-Diffusion Systems [J]. Differential Integral Equations, 1990, 3(1): 13-75.

[9] Amann H. Nonhomogeneous Linear and Quasilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems [M]. Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. Germany, Stuttgart: Teubner, 1993: 9-126.

[10] Amann H. Dynamic Theory of Quasilinear Parabolic Equations Ⅲ: Global Existence [J]. Math Z, 1989, 202(2): 219-250.

[11] Choi Y S, Wang Z A. Prevention of Blow-up by Fast Diffusion in Chemotaxis [J]. J Math Anal Appl, 2009, 362(2): 553-564.