第 49 卷 第 2 期 吉林大学学报(理学版) Vol. 49 No. 2
2011 年 3 月 Journal of Jilin University (Science Edition) Mar 2011

研究简报

一类非本原代换系统的混沌性态

王宏仁[1,2], 廖 丽[3], 范钦杰[1]
(1. 吉林师范大学 数学学院, 吉林 四平 136000; 2. 吉林大学 数学研究所, 长春 130012;
3. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

摘要: 研究符号集$\{0,1\}$上的非本原且非等长代换ζ诱导的系统, 这里$\zeta(0)=0a_1\cdots a_{p-1}$, $\zeta(1)=1,\cdots,1$, 证明了该系统是 Li-Yorke 混沌当且仅当存在$i>0$, 使得$a_i=0$; 并通过对符号出现频率的分析, 给出了诱导系统不是分布混沌的一个充分条件.

关键词: 代换系统; Li-Yorke 混沌; 分布混沌
中图分类号: O199.1 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)02-0240-03

Chaotic Behaviors for a Class of Non-primitive Substitution Systems

WANG Hong-ren[1,2], LIAO Li[3], FAN Qin-jie[1]
(1. *College of Mathematics, Jilin Normal University, Siping* 136000, *Jilin Province, China*;
2. *Institute of Mathematics, Jilin University, Changchun* 130012, *China*;
3. *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing* 100094, *China*)

Abstract: This paper deals with the system induced by the non-primitive and non-constant-length substitution ζ over the alphabet $\{0,1\}$, where $\zeta(0)=0a_1\cdots a_{p-1}$, $\zeta(1)=1,\cdots,1$. It has been proved that this system is Li-Yorke chaotic if and only if there exists $i>0$ such that $a_i=0$. In addition, investigating the occurrent frequency of the symbols shows a sufficient condition for the system not to be distributively chaotic.

Key words: substitution system; Li-Yorke chaos; distributional chaos

Li-Yorke 混沌[1]与分布混沌[2]是离散动力系统领域中的两个重要概念, 文献[1-9]用它们刻画了某类系统的复杂性. 文献[3]证明了本原等长代换系统必不是 Li-Yorke 混沌, 但可以存在 Li-Yorke 对, 并给出了该系统存在 Li-Yorke 对的一个等价刻画. 文献[4-5]指出: 两个符号的等长代换系统, 无论是否为本原, 都不存在分布混沌点对, 但非本原的等长代换系统在一定条件下可以是 Li-Yorke 混沌(即存在不可数集, 使得其中任何两点构成 Li-Yorke 对). 文献[6]给出了本原的等长代换系统存在分布混沌点对的一个充要条件.

本文在更广泛的意义下探讨两个符号的非本原代换系统(注意代换可以不等长), 给出了所研究的系统是 Li-Yorke 混沌的一个等价描述, 并证明了满足一定条件的该类系统必不存在分布混沌点对.

设$S=\{0,1\}$, $\Sigma=\{s=s_0s_1\cdots\mid s_i\in S,\ \forall i\geqslant 0\}$表示(由$S$确定的)单边符号空间, σ: $\Sigma\to\Sigma$表示Σ上的移位[8]. 若$Y\subset\Sigma$是闭集, 且$\sigma(Y)\subset Y$, 则称$\sigma|_Y$为σ的子移位或子系统.

如果A是S中元素的有限排列, 则称A为一符号段. 若$A=a_0\cdots a_{n-1}$, 其中

收稿日期: 2010-05-17.
作者简介: 王宏仁(1976—), 男, 汉族, 博士研究生, 讲师, 从事动力系统的研究, E-mail: whr2611@163.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10971084; 10771084)、吉林省教育厅"十一五"科学技术研究项目(批准号: [2009]199)和中国工程物理研究院科学技术发展基金(批准号: 2009B0403047).

$a_i \in S(i=0,1,\cdots,n-1)$, 则称 n 为 A 的长度, 记作 $|A|=n$. 用 $r(A)$ 表示出现在符号段 A 中 0 的个数. 设 $B=b_0\cdots b_{m-1}$ 为另一符号段. 记 $AB=a_0\cdots a_{n-1}b_0\cdots b_{m-1}$, 则 AB 也是符号段. 如果存在 $i\geqslant 0$, 使得 $a_j=b_{i+j}(j=0,1,\cdots,n-1)$, 则称 A 出现在 B 中, 记作 $A\prec B$. 类似地, 可给出符号段出现在 Σ 某点中的定义. 如果 $A_0,A_1,\cdots$ 都是符号段, 则 $A_0A_1\cdots$ 是 Σ 中的一个点.

令 S^* 表示 S 上所有符号段的集合. 每个从 S 到 S^* 的映射均称为(S 上的)代换. 如果 $|\zeta(0)|=|\zeta(1)|$, 则称代换 ζ 是等长的.

S 上的代换 ζ 定义为

$$\zeta(0) = a = a_0a_1\cdots a_{p-1}, \qquad \zeta(1) = b = b_0b_1\cdots b_{q-1}, \tag{1}$$

满足:

(H) (i) $a_0=0$; (ii) 存在 $i>0$, 使得 $a_i=1$; (iii) $q>0$.

由文献[10]可知, 对 ζ 做假设(H)的限制不失普遍意义. 在假设(H)下, ζ 在 Σ 中有一以 0 开头的不动点, 记作 u. 令 $X_\zeta=\overline{\{u,\sigma(u),\sigma(u),\cdots\}}$, $T=\sigma|_{X_\zeta}$, 则 T: $X_\zeta\to X_\zeta$ 为 σ 的一个子系统, 称作(由 ζ 诱导的)代换系统.

如果 $\zeta(1)$ 包含 0, 则称 ζ 是本原的; 否则, 称其为非本原的.

关于 Li-Yorke 对、Li-Yorke 混沌、分布混沌对和分布混沌的定义参见文献[6].

引理 1[9]　设 X 为没有孤立点的紧致度量空间, f: $X\to X$ 是具有周期点的、传递的连续映射, 则 f 是 Li-Yorke 混沌.

定理 1　设 ζ 为式(1)定义的代换, T 是由 ζ 诱导的代换系统. 若 ζ 非本原, 则 T 为 Li-Yorke 混沌的充要条件是存在 $i>0$, 使得 $a_i=0$.

证明: 如果对任何的 $i>0$, 均有 $a_i=1$, 则 ζ 的不动点 u 是 Σ 中以 0 开头其余坐标分量均为 1 的序列. 这时, T 显然不是 Li-Yorke 混沌.

另一方面, 假设存在 $i>0$, 使得 $a_i=0$. 则易见 T 是没有孤立点的传递映射, 且坐标分量均为 1 的序列为其一个不动点. 由引理 1 知, T 是 Li-Yorke 混沌.

引理 2　设 ζ 为式(1)定义的代换. 如果 ζ 非本原, 且 $r(a)\leqslant q$, 则当 $k\to\infty$ 时,

$$\frac{r(\zeta^k(0))}{|\zeta^k(0)|}\to 0.$$

证明: 由 ζ 的定义知, 对任何 $k\geqslant 0$, $r(\zeta^k(0))=(r(a))^k$. 由于

$$|\zeta^k(0)|=(r(a))^k+(r(a))^{k-1}(p-r(a))q^0+(r(a))^{k-2}(p-r(a))q^1+\cdots+ r(a)(p-r(a))q^{k-2}+(p-r(a))q^{k-1},$$

又因为 $r(a)\leqslant q$, 即当 $k\to\infty$ 时,

$$\frac{q^0}{(r(a))^1}+\frac{q^1}{(r(a))^2}+\cdots+\frac{q^{k-1}}{(r(a))^k}\to\infty.$$

并注意到 $p-r(a)\geqslant 1$, 因此当 $k\to\infty$ 时,

$$\frac{r(\zeta^k(0))}{|\zeta^k(0)|}=\frac{1}{1+(p-r(a))(1/r(a)+q^1/(r(a))^2+\cdots+q^{k-1}/(r(a))^k)}\to 0.$$

由文献[5]中定理 3.3 的证明可得:

引理 3　设 (X_ζ,T) 是 ζ 诱导的代换系统. 若对任何的 $x=x_0x_1\cdots\in X_\zeta$, 均有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}r(x_0x_1\cdots x_{N-1})=0, \tag{2}$$

则 T 没有分布混沌点对.

定理 2　设 ζ 为式(1)定义的代换. 如果 ζ 非本原, 且 $r(a)\leqslant q$, 则 T 不是分布混沌.

证明: 设 A 为出现在 u 中长度是 N 的符号段, 这里 u 是 ζ 在 Σ 中以 0 开头的不动点. 给定 $\varepsilon>0$, 由引理 2 知, 存在 $k>0$, 使得 $\frac{r(\zeta^k(0))}{|\zeta^k(0)|}<\frac{\varepsilon}{2}$. 当 $N\gg k$ 时, 由 $A\prec u$ 及 u 的定义知, 可将 A 写作:

$A=PA_1\cdots A_lQ$, 其中 $A_i(1\leqslant i\leqslant l)=\zeta^k(0)$ 或 $\zeta^k(1)$; P 和 Q 都是长度 $<\max\{p,q\}$ 的符号段. 假设诸 A_i 中共有 m 个为 $\zeta^k(0)$, 则 $m\leqslant l$, 且有

$$r(A)=m\cdot r(\zeta^k(0))+r(P)+r(Q).$$

从而只要 N 充分大, 使得 $\dfrac{|P|+|Q|}{N}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 即有

$$\frac{r(A)}{N}=\frac{m\cdot r(\zeta^k(0))}{N}+\frac{r(P)+r(Q)}{N}\leqslant\frac{r(\zeta^k(0))}{N/m}+\frac{|P|+|Q|}{N}\leqslant$$
$$\frac{r(\zeta^k(0))}{|\zeta^k(0)|}+\frac{|P|+|Q|}{N}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

式中第三个不等式成立是由于 $\dfrac{N}{m}\geqslant|\zeta^k(0)|$. 这里证明 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{r(A)}{N}=0$. 因为对任何 N, $x_0x_1\cdots x_{N-1}\prec u$, 因此, 对任何 $x=x_0x_1\cdots\in X_\zeta$, 式(2)成立. 由引理3知, T 没有分布混沌点对, 因而 T 不是分布混沌.

在式(1)中, 如果 $|\zeta(0)|=|\zeta(1)|$, 则显然 $r(a)\leqslant q$. 因此, 由定理2可得:

推论1 设 ζ 为式(1)定义的代换. 如果 ζ 等长且非本原, 则 T 不是分布混沌.

推论1是文献[5]中的一个结果.

例1 令 $\zeta_1(0)=001$, $\zeta_1(1)=111$; $\zeta_2(0)=010$, $\zeta_2(1)=11$. 则 ζ_1,ζ_2 都是非本原代换, 前者等长, 后者不等长. 不难验证它们均满足定理1和定理2的条件, 因此它们所诱导的系统是Li-Yorke混沌, 但不是分布混沌.

例2 令 $\zeta_3(0)=01$, $\zeta_3(1)=1$. 则 ζ_3 不满足定理1的条件, 但满足定理2的条件. 因此, 它诱导的系统既不是Li-Yorke混沌, 也不是分布混沌.

例3 令 $\zeta_4(0)=001$, $\zeta_4(1)=1$. 则 ζ_4 满足定理1的条件, 但不满足定理2的条件. 因此, 由定理1知, 它诱导的系统是Li-Yorke混沌, 但该系统是否存在分布混沌点对无法判定.

参 考 文 献

[1] Li T Y, Yorke J A. Period Three Implies Chaos [J]. Amer Math Monthly, 1975, 82(10): 985-992.

[2] Schweitzer B, Smítal J. Measures of Chaos and a Spectral Decomposition of Dynamical Systems of the Interval [J]. Tran Amer Math Soc, 1994, 344(2): 737-754.

[3] Blanchard F, Durand F, Maass A. Constant-Length Substitutions and Countable Scrambled Sets [J]. Nonlinearity, 2004, 17(3): 817-833.

[4] LIAO Gong-fu, FAN Qin-jie, WANG Li-dong. A Class of Primitive Substitutions and Scrambled Sets [J]. Science in China: Series A, 2008, 51(3): 369-375.

[5] LIAO Gong-fu, WANG Wei, FAN Qin-jie. A Class of Non-primitive Substitutions and Chaos [J]. Chinese Annals of Mathematics: Ser A, 2009, 30(2): 183-188. (廖公夫, 汪威, 范钦杰. 一类非本原代换与混沌 [J]. 数学年刊: A辑, 2009, 30(2): 183-188.)

[6] WANG Hui, FAN Qin-jie, LIAO Gong-fu. Distributional Chaos in Constant-Length Substitution Systems [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010, 72(3/4): 1902-1908.

[7] Blanchard F, Glasner E, Kolyada S, et al. On Li-Yorke Pairs [J]. Reine Angew Math, 2002, 547(1): 51-68.

[8] Block L S, Coppel W A. Dynamics in One Dimension [M]. New York: Springer-Verlag, 1992.

[9] HUANG Wen, YE Xiang-dong. Devaney's Chaos or 2-Scattering Implies Li-Yorke's Chaos [J]. Topology and Its Applications, 2002, 117(3): 259-272.

[10] Queffelec M. Substitution Dynamical Systems: Spectral Analysis [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1987.