第49卷 第2期 吉林大学学报(理学版) Vol. 49 No. 2
2011年3月 Journal of Jilin University (Science Edition) Mar 2011

研究快报

随机时滞 FitzHugh-Nagumo 格点系统随机吸引子的存在性

许 璐, 闫卫平
(吉林大学 数学研究所, 长春 130012)

摘要: 利用切尾技巧, 研究随机时滞 FitzHugh-Nagumo 格点系统随机吸引子的存在性. 在适当的耗散性条件下, 证明了该系统随机吸引子的存在性, 即随机紧不变集的存在性.

关键词: 随机时滞; FitzHugh-Nagumo 格点系统; 随机吸引子; 存在性
中图分类号: O175.1 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)02-0235-02

Existence of Random Attractors for the Stochastic FitzHugh-Nagumo Systems with Delay on Infinite Lattice

XU Lu, YAN Wei-ping
(*Institute of Mathematics, Jilin University, Changchun* 130012, *China*)

Abstract: This paper deals with the existence of random attractors for the stochastic FitzHugh-Nagumo systems with delay on infinite lattice. Under suitable dissipative conditions, it is shown that such a system has a random attractor which is a random compact invariant set.

Key words: random delay; FitzHugh-Nagumo lattice system; random attractor; existence

格点动力系统在生物学和化学、模式识别和图像处理、电子工程以及材料科学[1]等领域应用广泛. 文献[2]研究了带白噪声的一阶随机格点动力系统全局吸引子的存在性; 文献[3]将该结果推广到高维格点方程中, 并研究了无穷格点中的随机 Ginzburg-Landau 方程[4]; 文献[5]研究了随机 FitzHugh-Nagumo 格点系统随机吸引子的存在性; 文献[6]证明了一阶随机格点动力系统吸引子的存在性. 本文研究时滞的随机离散 FitzHugh-Nagumo 系统吸引子的存在性.

令$(H, \|\cdot\|_H)$为 Hilbert 空间, $(\Omega,\mathbb{F},P)$为概率测度空间. 考虑测度空间$(\Omega,\mathbb{F},P,(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$中的随机动力系统$\phi(t,\omega,\cdot)$.

定义1 令 $\mathbb{D}$ 为 H 中随机子集的集合, 并且$\{\mathbb{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathbb{D}$. 如果对于所有的$B\in\mathbb{D}$ 和 P 测度下几乎所有的(P-a. e.)$\omega\in\Omega$, 都存在$t_B(\omega)>0$, 使得$\phi(t,\theta_{-t}\omega, B(\theta_{-t}\omega))\subset\mathbb{K}(\omega)$, $\forall t\geqslant t_B(\omega)$, 则随机集合$\{\mathbb{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$称为 $\mathbb{D}$ 中的吸引集.

定义2 令 $\mathbb{D}$ 为 H 中随机子集的集合, 并且$\{\mathbb{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathbb{D}$. 如果对所有的 P-a. e. $\omega\in\Omega$ 满足以下条件, 则称随机集合$\{\mathbb{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$是随机动力系统 ϕ 的 $\mathbb{D}$-随机吸引子:

1) $\mathbb{A}(\omega)$是紧的, 并且对所有的$x\in H$, $\omega\to d(x,\mathbb{A}(\omega))$都是可测的;

2) $\mathbb{A}(\omega)$是不变的, 即对所有的$t\geqslant 0$, $\phi(t,\omega,\mathbb{A}(\omega))=\mathbb{A}(\theta_t\omega)$;

3) 对所有$B=\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathbb{D}$, $\lim\limits_{t\to\infty} d(\phi(t,\theta_{-t}\omega,B(\theta_{-t}\omega)),\mathbb{A}(\omega))=0$, 其中 d 表示 Hausdorff 半测度, 即对任意的$X,Y\subset H$, $d(X,Y)=\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y}\|x-y\|_H$.

收稿日期: 2011-01-14.

作者简介: 许 璐(1983—), 女, 汉族, 博士研究生, 从事微分动力系统的研究, E-mail: luxujilin@yahoo.cn. 通讯作者: 闫卫平(1984—), 男, 汉族, 博士研究生, 从事微分动力系统的研究, E-mail: yan8441@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11026043)和吉林大学研究生创新项目基金(批准号: 20101049).

令 $\mathbb{D}$ 为 H 中随机子集的集合. 如果对所有的 P-a. e. $\omega\in\Omega$, 当 $t_n\to\infty$ 且 $x_n\in B(\theta_{-t_n}\omega)$, $\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathbb{D}$ 时, $\{\phi(t_n,\theta_{-t_n}\omega,x_n)\}_{n=1}^{\infty}$有一个收敛子序列, 则 ϕ 称为 H 中的 $\mathbb{D}$-拉回渐近紧集.

命题1[2] 令 $\mathbb{D}$ 为 H 中随机子集闭包的集合, 并且 ϕ 是 H 上的随机动力系统$(\Omega,\mathbb{F},P,(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$. 假设$\{\mathbb{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$是 $\mathbb{D}$-拉回渐近紧的连续随机动力系统 ϕ 的闭随机吸收集合. 则 ϕ 有唯一的 $\mathbb{D}$-随机吸引子$\mathbb{A}(\omega)=\bigcap\limits_{\kappa\geqslant 0}\overline{\bigcup\limits_{t\geqslant\kappa}\phi(t,\theta_{-t}\omega,\mathbb{K}(\theta_{-t}\omega))}$, 并且 $\mathbb{A}(\omega)$是 H 中的紧集.

考虑如下带时滞的一阶随机格点方程:

$$\begin{aligned} &\dot{u}+Au+\psi-f(u_t)=a\dot{w}_1(t),\\ &\dot{\psi}+\lambda_1\psi-\lambda_2 u=b\dot{w}_2(t),\\ &u_\tau=u(s+\tau),\quad s\in[-\tau,0],\quad \tau>0,\end{aligned}\tag{1}$$

其中: $u_t=u_t(s)=u(t+s)$是时滞区间$[-\tau,0]$中的时滞项; $u_\tau=u(\tau+s)$是区域$[0,\tau]$初始值; 光滑函数f满足如下耗散性条件:

(H_1) 对任意有界集合 $Y\subset l^2$, 存在正常数 L_f, 使得对所有的 $u,v\in Y$,

$$\|f(u)-f(v)\|\leqslant L_f\|u-v\|;$$

(H_2) 存在正常数 α_1,α_2, 使得$f_i(0)=0$, $f_i(u_{it})u_i\leqslant-\alpha_1|u_i|^2+\alpha_2\max\limits_{s\in[-\tau,0]}|u_{it}|^2$, $\forall t\in\mathbb{R}^+$.

下面给出一阶随机格点方程随机吸引子的存在性定理, 该定理是命题1的推广.

定理1 由系统(1)生成的联系随机动力系统 ϕ_t, 在 $\mathbb{X}_\tau$ 中有唯一的 $\mathbb{D}$-吸引子$\mathbb{A}$, 如果对所有的P-a. e. $\omega\in\Omega$, ϕ_t 满足以下条件:

(C_1) ϕ_t 有一个有界吸收集$\{\mathbb{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathbb{D}$;

(C_2) 对任何的 $t_n\to\infty$, 当 $n\to\infty$ 时, 有 $\lim\limits_{m\to\infty}\ \limsup\limits_{n\to\infty}\ \max\limits_{s\in[-\tau,0]}\sum\limits_{|i|\geqslant m}(\phi_{it_n}(s,\theta_{-t_n}\omega,x_n))^2=0$, 其中 $x_n\in\mathbb{K}(\theta_{-t_n}\omega)$.

证明: 根据命题1, 只需证明 ϕ_t 有一个有界的吸收集及 $\mathbb{D}$-拉回渐近集是紧的. 假设(C_1)保证了有界吸收集存在, 则只需应用 Ascoli-Arzelá 定理证明 $\mathbb{D}$-拉回集的紧性即可.

引理1 对于所有的 P-a. e. $\omega\in\Omega$, 存在$\{\mathbb{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}\in\mathbb{D}$, 使得$\{\mathbb{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$是 ϕ_t 的一个随机集合.

引理2 假设$(u_\tau,\varphi_\tau)\in\mathbb{K}(\omega)$, 则对任何的 $\varepsilon>0$ 和所有的 P-a. e. $\omega\in\Omega$, 存在 $T(\varepsilon,\omega)>0$ 和 $N(\varepsilon,\omega)>0$, 使得 u_t 为系统(1)的解, 满足

$$\max_{s\in[-\tau,0]}\sum_{|i|>N(\varepsilon,\omega)}|u_{it}(s,\theta_{-t}\omega,u_\tau(\theta_{-t}\omega))|^2+\sum_{|i|>N(\varepsilon,\omega)}|\varphi_i(t,\theta_{-t}\omega,u_\tau(\theta_{-t}\omega))|^2\leqslant\varepsilon,\ \forall t\geqslant T(\varepsilon,\omega)+\tau.$$

下面给出本文的主要结果.

定理2 假设(H_1),(H_2)成立. 则在测度 P 意义下, 对几乎所有的 $\omega\in\Omega$, 系统(1)的随机动力系统 ϕ_t 有一个 $\mathbb{D}$-随机吸引子.

为证明定理2, 首先要找到系统(1)的解 $u,\psi\in l^2$. 再由定理1、引理1、引理2可知, 格点动力系统(1)具有随机吸引子.

参 考 文 献

[1] Hillert M. A Solid-Solution Model for Inhomogeneous Systems [J]. Acta Metall, 1961, 9(6): 525-535.

[2] Bates P W, Lisei H, Lu K N. Attractors for Stochastic Lattice Dynamical Systems [J]. Stoch Dyn, 2006, 6(1): 1-21.

[3] LÜ Yan, SUN Jian-hua. Asymptotic Behavior of Stochastic Discrete Complex Ginzburg-Landau Equations [J]. Physica D, 2006, 221(2): 157-169.

[4] LÜ Yan, SUN Jian-hua. Dynamical Behavior for Stochastic Lattice Systems [J]. Chaos Solitions Fractals, 2006, 27(4): 1080-1090.

[5] HUANG Jian-hua. The Random Attractor of Stochastic FitzHugh-Nagumo Equations in an Infinite Lattice with White Noises [J]. Physica D, 2007, 233(2): 83-94.

[6] Yan W P, Li Y, Ji S G. Random Attractors for First Order Stochastic Retarded Lattice Dynamical Systems [J]. J Math Phys, 2010, 51: 032702.