第49卷 第2期 吉林大学学报(理学版) Vol.49 No.2
2011年3月 Journal of Jilin University (Science Edition) Mar 2011

研究快报

多方参与下的微分对策

王 珺, 杨 雪
(吉林大学 数学学院, 长春 130012)

摘要: 应用集值理论讨论以两个局中人对抗为主体、多个局中人间接参与的一类特殊微分对策, 给出了其极小极大控制的存在性定理.

关键词: 微分对策; 多人对策; 极小极大控制
中图分类号: O225 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)02-0233-02

Multi-participant Differential Games

WANG Jun, YANG Xue
(*College of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: With the aid of the set-valued theory, we discussed a particular differential game for the differential game model of two-player conflicting with other players indirectly affecting outcome and gave the existence theorem of the minimax controls.

Key words: differential game; multi-player participant game; minimax control

合作型微分对策[1]中, 一般以局中人全体利益最大化为目标函数, 当需要其中局部利益最大时, 往往局中人进行联盟. 本文考虑一类特殊的联盟: 在一个二人非零和微分对策[2-3]的基础上, 如果有其他局中人想从该对抗中获利, 但他不完全与某一方联盟却间接影响对策的结果. 例如, 战争中向双方倒卖军火[4-5]、零件制造商为不同的厂商供货等. 为此, 需建立一个以二人战斗为主体、多方参与的微分对策模型. 该微分对策既不是合作的, 也不能称为非合作的微分对策. 本文讨论上述微分对策极小极大控制的存在性. 考虑动力系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(t,x,u,v,w), \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0. \tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 是状态向量; t_0 是初始时间; $\boldsymbol{x}_0$ 是初始状态; u,v,w 分别是局中人的控制, 是Lebesgue可测函数, 并且各自在紧致子集 $U\subset\mathbb{R}^{m_1}, V\subset\mathbb{R}^{m_2}, W\subset\mathbb{R}^{m_3}$ 中取值. 假设 $f(t,x,y,v,w)$ 满足一切条件使得系统(1)存在唯一解. 再假设 f 和控制函数能使所有解连续直到 $t=t_f$, 目标能达到; 或直到 $t=T^*$, 其中 T^*-t_0 是允许的最大时间段, 则对策被认为结束. 上述问题的二人对策可参见文献[6-7].

局中人 u,v,w 分别有支付函数 J_1,J_2,J_3, 形如 $J_i(u,v,w)=\int_{t_0}^{t_f} g_i(t,x,u,v,w)\,\mathrm{d}t + K_i(t_f)$ $(i=1,2,3)$. 假设对策开始于 $(t_0,\boldsymbol{x}(t_0))$, 不妨令 $(t_0,\boldsymbol{x}(t_0))$ 属于局中人 u 最后胜利区域, 则局中人 u 不仅要减小他的支付 J_1, 而且必须控制 $(t,x(t))$ 一直在局中人 u 的胜利域中. 这样, 约束条件在控制空间 $U\times V\times W$ 的一个子集中, 不妨设该约束子集为 D. 用 J 表示支付函数 J_1, J: $U\times V\times W\to\mathbb{R}^1$ 为一个有界实值函数, 其数学表达式如下:

$$\inf_{u\in U}\sup_{v\in V}\sup_{w\in W} J(u,v,w), \qquad \text{s.t. } (u,v,w)\in D. \tag{2}$$

收稿日期: 2011-01-14.
作者简介: 王 珺(1983—), 女, 汉族, 博士研究生, 从事微分对策的研究, E-mail: 0435lover@163.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11026043).

对问题(2)的求解, 给定 $u\in U$, 令 $Z_D(u)=\{(v,w)\mid(u,v,w)\in D\}$. 给定 $u\in U$, $v\in V$, 令 $W_D(v)=\{w\mid(v,w)\in Z_D(u)\}$, 集合 Z_D,W_D 可能为空集. 令 $U_D=\{u\mid Z_D(u)\neq\varnothing\}$, $V_D=\{v\mid W_D(v)\neq\varnothing\}$. 集合 $Z_D(u),W_D(v),U_D,V_D$ 都是集值函数, 则问题(2)等价于 $\inf\limits_{u\in U_D}\sup\limits_{v\in V_D}\sup\limits_{w\in W_D(v)}J(u,v,w)$.

引理1 假设 D 是闭的, 则对于任意 $u\in U_D$, $Z_D(u)$ 是闭的; 对于任意 $u\in U_D$, $v\in V_D$, $W_D(v)$ 也是闭的. 而且如果空间 V,W 是紧的, 则 $Z_D(u),W_D(v)$ 也是紧的.

引理2 假设 D 是闭的, 且 U,V,W 是紧致子集, 则 U_D,V_D 也是紧的.

令 J 为 $U\times V\times W$ 上的有界函数. 对任意 $u\in U$, $v\in V$, 令

$$h(u,v)=\sup_{w\in W_D(v)}J(u,v,w). \tag{3}$$

命题1 假设对任意 $u\in U$, $v\in V$, 函数 $J(u,v,\cdot):W\to\mathbb{R}^1$ 是上半连续的(u.s.c), 则最大值在式(3)能达到, 即 $h(u,v)=\max\limits_{w\in W_D(v)}J(u,v,w)$.

上述 h 的性质不仅依靠函数 J, 还有约束集 D. 对任意 $u\in U$, 有一个集 $Z_D(u)$, 是从 U 到 $V\times W$ 的集值映射; 对任意 $u\in U$, $v\in V$, 集 $W_D(v)$ 是从 V 到 W 的集值映射.

命题2 假设对任意 $u\in U$, 函数 $J(u,\cdot,\cdot):V\times W\to\mathbb{R}^1$ 是上半连续的, $W_D(\cdot)$ 是从 V 到 W 的一个映射, 且 $W_D(\cdot)$ 上半连续, 则 $h(u,v)$ 在 V_D 上半连续.

对任意 $u\in U$, 令 $g(u)=\sup\limits_{v\in V_D}h(u,v)$.

命题3 假设对任意 $u\in U$, 函数 $J(u,\cdot,\cdot):V\times W\to\mathbb{R}^1$ 是上半连续的(u.s.c), 对任意 $u\in U$, $v\in V$, 函数 $J(u,v,\cdot):W\to\mathbb{R}^1$ 是上半连续的(u.s.c); $W_D(\cdot)$ 是从 V 到 W 的一个映射, 且 $W_D(\cdot)$ 是上半连续的, 则最大值在 $g(u)=\sup\limits_{v\in V_D}h(u,v)$ 能达到, 即 $g(u)=\max\limits_{v\in V_D}h(u,v)$.

引理3 假设 J 是 $U\times V\times W$ 下半连续的, $Z_D(\cdot)$ 是从 U 到 $V\times W$ 的一个映射, 且 $Z_D(\cdot)$ 是下半连续的, 则 $g(u)=\sup\limits_{v\in V_D}\sup\limits_{w\in W_D(v)}J(u,v,w)$ 是在 U_D 下半连续的函数.

定理1 假设 U,V 和 W 为紧致拓扑空间, D 是乘积空间 $U\times V\times W$ 上的一闭集. J: $U\times V\times W\to\mathbb{R}^1$ 是一实值函数, 满足下列条件: 1) 对任意 $u\in U$, $v\in V$, $J(u,v,\cdot):W\to\mathbb{R}^1$ 是在 W 上半连续的; 2) 对 $\forall u\in U$, $J(u,\cdot,\cdot):V\times W\to\mathbb{R}^1$ 是在 $V\times W$ 上半连续的; 3) J 在 $U\times V\times W$ 是下半连续的; 4) $Z_D(\cdot)$ 在 U_D 上是下半连续的; 5) $W_D(\cdot)$ 是在 V_D 上半连续的. 则约束问题(2)有一极值解, 即存在一点 $(\bar u,\bar v,\bar w)\in D$, 使得 $J(\bar u,\bar v,\bar w)=\min\limits_{u\in U}\max\limits_{v\in V}\max\limits_{w\in W}J(u,v,w)$, s.t. $(u,v,w)\in D$.

证明: 对任意 $u\in U_D$, 由命题1和命题2知, 存在 $(v_0,w_0)\in Z_D(u)$, 使得 $g(u)=\max\limits_{v\in V_D}\max\limits_{w\in W_D}J(u,v,w)=J(u,v_0,w_0)$. 令 $c=\inf\limits_{u\in U_D}g(u)$, 则存在 $u_n\in U_D(n=1,2,\cdots)$, 使得 $g(u_n)\to c$. 由于 U_D 是紧的, 则存在 u_n 的子列 u_{n_j}, 使得 $u_{n_j}\to u_0$. 因为 U_D 是闭的, 则 $u_0\in U_D$. 又由引理3知, $g(u)$ 是下半连续的, 从而 $c=\varliminf\limits_{j\to+\infty}g(u_{n_j})\geqslant g(u_0)\geqslant c$. 故 $g(u_0)=c$, 定理1成立.

参考文献

[1] Yeumg D W K, Petrosyan L A. Cooperative Stochastic Differential Games [M]. New York: Springer, 2000.

[2] Isaacs R. Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit Control and Optimization [M]. New York: John Wiley and Sons, 1965.

[3] Basar T, Olsder G J. Dynamic Noncooperative Game Theory [M]. 2nd ed. New York: Academic Press, 1995.

[4] Mukai H, Tanikawa A, Tunay I, et al. Sequential Linear-Quadratic Method for Differential Games with Air Combat Applications [J]. Computational Optimization and Applications, 2003, 25(1/2/3): 193-222.

[5] Novak A J, Feichtinger G, Leitmann G. A Differential Game Related to Terrorism: Nash and Stackelberg Strategies [J]. J Optim Theory Appl, 2010, 144(3): 533-555.

[6] Isac G, Zheng Q. On Combat Games: A Constrained Minimaximization Approach (Ⅰ) [J]. Operational Research Transactions, 2005, 9(4): 1-13.

[7] Isac G, Zheng Q. On Combat Games: A Constrained Minimaximization Approach (Ⅱ) [J]. Operational Research Transactions, 2006, 10(1): 1-13.