Clifford 分析中 k 超正则函数带位移的非线性边值问题

汤　获[1,2], 邓冠铁[1], 木　林[2]
(1. 北京师范大学 数学科学学院, 北京 100875; 2. 赤峰学院 数学与统计学院, 内蒙古 赤峰 024000)

摘要: 利用积分方程的方法和 Schauder 不动点原理研究 Clifford 分析中 k 超正则函数带位移的非线性边值问题, 证明了解的存在性和唯一性, 并得到了解的积分表达式.

关键词: Clifford 分析; k 超正则函数; 位移; 非线性边值问题
中图分类号: O174.5　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-5489(2012)04-0616-05

Nonlinear Boundary Value Problem with Shift for k Hypermonogenic Functions in Clifford Analysis

TANG Huo[1,2], DENG Guan-tie[1], MU Lin[2]
(1. *School of Mathematical Sciences*, *Beijing Normal University*, *Beijing* 100875, *China*;
2. *School of Mathematics and Statistics*, *Chifeng University*, *Chifeng* 024000, *Inner Mongolia Autonomous Region*, *China*)

Abstract: With the help of the theory of integral equations and Schauder fixed-point theorem, nonlinear boundary value problem with shift for k hypermonogenic functions in Clifford analysis was investigated. The existence and uniqueness of the solution to the above problem were proved, and the integral representation of its solution was obtained.

Key words: Clifford analysis; k hypermonogenic functions; shift; nonlinear boundary value problem

近年来, Clifford 分析中的函数理论得到人们广泛关注, 文献[1-2]研究了正则函数和双正则函数的边值问题; 文献[3-5]研究了超正则函数的性质和边值问题; 文献[6]研究了 k 正则函数的线性边值问题; 文献[7-8]研究了 k 超正则函数及其相关函数的性质; 文献[9]研究了 k 超正则函数的 Riemann 边值问题. 本文在上述工作的基础上, 利用与文献[10-11]类似的方法, 研究 k 超正则函数的一类带位移的非线性边值问题.

1　预备知识

设 $A_{n+1}(R)$ 为实 Clifford 代数, 其基为 $e_0=1$, $e_1,\cdots,e_n$; $e_1e_2,\cdots,e_{n-1}e_n$; $\cdots$; $e_1\cdots e_n$, 且 $e_k^2=-1$, $k=1,2,\cdots,n$, $e_ie_j+e_je_i=0$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots,n$. $A_{n+1}(R)$ 中元素 a 可表示成 $a=\sum\limits_A x_Ae_A$, $x_A\in R$, 其中 $e_A=e_{\alpha_1}\cdots e_{\alpha_h}=e_{\alpha_1\cdots\alpha_h}$, $A=\{\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_h\}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$, $1\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_h\leqslant n$. 若 $A=\varnothing$, 记 $e_\varnothing=e_0$

收稿日期: 2011-09-26.
作者简介: 汤　获(1979—), 男, 汉族, 博士研究生, 讲师, 从事复分析及其边值问题的研究, E-mail: thth2009@tom.com. 通讯作者: 邓冠铁(1959—), 男, 汉族, 博士, 教授, 博士生导师, 从事复分析及其应用的研究, E-mail: denggt@bnu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11071020)、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20100003110004)、内蒙古自然科学基金(批准号: 2010MS0117)和内蒙古高校科研基金(批准号: NJzc08160).

为单位元.

任一元素 $a \in A_{n+1}(R)$ 可唯一地分解成 $a = b + ce_n$，其中 $b, c \in A_n(R)$（由 $e_0, \cdots, e_{n-1}$ 生成的 Clifford 代数）. 记 $Pa = b$，$Qa = c$，即 P, Q 都是 $A_{n+1}(R) \to A_n(R)$ 的映射.

规定运算：$a' = \sum_A x_A e_A'$，其中：$e_A' = (-1)^{|A|} e_A$；$|A|$ 为 A 中元素的个数，易见 $e_0' = e_0$，$e_i' = -e_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$. $\tilde{a} = \sum_A x_A \tilde{e}_A$，其中：$\tilde{e}_n = -e_n$，$\tilde{e}_i = e_i$，$i = 0, 1, \cdots, n-1$.

记 C^r 类函数集合如下：

$$F_\Omega^{(r)} = \left\{ f \middle| f\colon \Omega \to A_{n+1}(R), f(x) = \sum_A f_A(x) e_A, f_A(x) \in C^r(\Omega) \right\},$$

式中：$r \geqslant 1$；Ω 为 R^{n+1} 中非空连通开集.

定义 Dirac 算子和修正的 Dirac 算子 M^l：

$$D_l f = \sum_{i=0}^{n} e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad M_k^l f(x) = D_l f(x) + k \frac{Q' f}{x_n}, \quad f \in F_\Omega^{(r)} (r \geqslant 1), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

下面设 $\Omega \subset R_+^{n+1} = \{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_n > 0 \}$ 是非空有界单连通区域，其边界 Σ 是光滑紧致定向的 Liapunov曲面，记 Ω 的内部为 Ω^+，$R_+^{n+1} / \overline{\Omega}$ 为 Ω^-.

定义 1　设 $f \in F_\Omega^{(r)} (r \geqslant 1)$，若 f 在 Ω 内满足 $M_k^l f = 0$，则称 f 为 Ω 内的 k 超正则函数. 特别地，当 $k = 0$时，f 即为文献[1]中定义的正则函数；当 $k = n-1$ 时，f 即为文献[3-5]中定义的超正则函数.

定义 2　如果 Σ 上的函数 $f(t)$ 满足：$|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant J |t_1 - t_2|^\alpha$，$t_1, t_2 \in \Sigma$，$0 < \alpha < 1$，$J$ 为正常数，则称 $f(t)$ 在 Σ 上是 Hölder 连续的，记 Σ 上 Hölder 连续的函数集合为 $H(\Sigma, \alpha)$.

任取 $f \in H(\Sigma, \alpha)$，定义 f 的范数

$$\| f \|_\alpha = C(f, \Sigma) + H(f, \Sigma, \alpha),$$

其中

$$C(f, \Sigma) = \max_{t \in \Sigma} |f|, \qquad H(f, \Sigma, \alpha) = \sup_{t_1 \neq t_2;\, t_1, t_2 \in \Sigma} \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha},$$

易证 $H(\Sigma, \alpha)$ 是一 Banach 空间，对于 $f, g \in H(\Sigma, \alpha)$，有

$$\| f + g \|_\alpha \leqslant \| f \|_\alpha + \| g \|_\alpha, \qquad \| fg \|_\alpha \leqslant J_0 \| f \|_\alpha \| g \|_\alpha, \tag{1}$$

式中 J_0 是一个正常数.

2　k 超正则函数的 Cauchy 积分公式和 Plemelj 公式

引理 1[9]　设 Ω, Σ 如上所述，f 为 Ω 内的 k 超正则函数，则对 $x \in \Omega$，有

$$\Phi(x) = \frac{2^{n-1} x_n^{n-1}}{w_{n+1}} \left(\int_\Sigma E(y, x) \mathrm{d}\delta_0(y) F(y) - \int_\Sigma M(y, x) \mathrm{d}\, \widetilde{\delta_0(y)}\, \widetilde{F(y)} \right), \tag{2}$$

其中：

$$E(y, x) = \frac{(y - x)^{-1}}{|y - x|^{n-1} |y - \tilde{x}|^{n-1}};$$

$$M(y, x) = \frac{(\tilde{y} - x)^{-1}}{|y - x|^{n-1} |y - \tilde{x}|^{n-1}};$$

$$F(y) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!} (y_0 - x_0)^j M_y^j f(y);$$

w_{n+1}是 R^{n+1}中单位球的表面积；$\mathrm{d}\delta_0$ 是 $A_{n+1}(R)$值 n-流形[5].

引理 2[9]　设 $F(t) \in H(\Sigma, \alpha)$，$\Phi^+(t), \Phi^-(t)$分别是 $\Phi(x)$当 x 从 $\Omega^+, \Omega^- \to t$ 时的极限，则有

$$\begin{cases} \Phi^+(t) = PF(t) + \dfrac{1}{2} F(t), \\ \Phi^-(t) = PF(t) - \dfrac{1}{2} F(t), \end{cases} \tag{3}$$

其中:

$$PF(t)=P.V.\frac{2^{n-1}t_n^{n-1}}{w_{n+1}}\Big(\int_\Sigma E(y,t)\mathrm{d}\delta_0(y)F(y)-\int_\Sigma M(y,t)\mathrm{d}\widetilde{\delta_0(y)}\ \widetilde{F(y)}\Big);$$

$E(y,t),M(y,t),F(y)$如式(2)所述; P是映$H(\Sigma,\alpha)$到自身的有界线性算子, 且有

$$\|PF\|_\alpha\leqslant J_1\|F\|_\alpha,\tag{4}$$

式中J_1是一个正常数.

定义3[12] 设$d(t)$为$\Sigma\to\Sigma$的同胚映射, 则称$d(t)$为Σ上的位移.

推论1 设$d(t)$为Σ上的位移, 对于$t\in\Sigma$, 有

$$\begin{cases}\Phi^+(d(t))=PF(d(t))+\dfrac{1}{2}F(d(t)),\\[2ex]\Phi^-(d(t))=PF(d(t))-\dfrac{1}{2}F(d(t)),\end{cases}\tag{5}$$

其中:

$$PF(d(t))=P.V.\frac{2^{n-1}(d(t))_n^{n-1}}{w_{n+1}}\Big(\int_\Sigma E(y,d(t))\mathrm{d}\delta_0(y)F(y)-\int_\Sigma M(y,d(t))\mathrm{d}\widetilde{\delta_0(y)}\ \widetilde{F(y)}\Big).$$

3 k超正则函数的非线性边值问题

问题1 设$\Omega,\Sigma,d(t)$如上所述, 求在$\Omega^\pm$内k超正则, 在$\Omega^++\Sigma$和$\Omega^-+\Sigma$上连续的函数$\Phi(x)$适合

$$\begin{aligned}A(t)\Phi^+(t)+B(t)\Phi^+(d(t))+C(t)\Phi^-(t)+D(t)\Phi^-(d(t))&=\\ G(t)L(t,\Phi^+,\Phi^-,\Phi^+(d),\Phi^-(d)),\end{aligned}\tag{6}$$

这里: $t\in\Sigma$; $x\in R^{n+1}/\Sigma$; $A(t),B(t),C(t),D(t),G(t)\in H(\Sigma,\alpha)$为$\Sigma$上给定的函数; $L(t,\Phi^{(1)},\Phi^{(2)},\Phi^{(3)},\Phi^{(4)})$为在$\Sigma\times A_{n+1}(R)\times A_{n+1}(R)\times A_{n+1}(R)\times A_{n+1}(R)$上给定的函数.

将式(3)和(5)代入式(6), 并省略t, 得

$$A\Big(PF+\frac{1}{2}F\Big)+B\Big(PF(d)+\frac{F(d)}{2}\Big)+C\Big(PF-\frac{1}{2}F\Big)+D\Big(PF(d)-\frac{F(d)}{2}\Big)=GL.$$

令

$$SF=(A+C)\Big(PF-\frac{1}{2}F\Big)+(1+A)F+(B+D)\Big(PF(d)-\frac{F(d)}{2}\Big)+BF(d)-GL,$$

于是问题1可转化为奇异积分方程[13]

$$SF=F.\tag{7}$$

定理1 设Ω,Σ如上所述, $F\in H(\Sigma,\alpha)$, 则存在与F无关的正常数J_2, 使得

$$\Big\|PF+\frac{1}{2}F\Big\|_\alpha\leqslant J_2\|F\|_\alpha,\qquad\Big\|PF-\frac{1}{2}F\Big\|_\alpha\leqslant J_2\|F\|_\alpha.\tag{8}$$

证明: 由式(1)和(4), 知

$$\Big\|PF+\frac{1}{2}F\Big\|_\alpha=\|PF\|_\alpha+\frac{1}{2}\|F\|_\alpha\leqslant\Big(\frac{1}{2}+J_1\Big)\|F\|_\alpha=J_2\|F\|_\alpha,$$

同理可证其他不定式也成立.

引理3[12] 设$d(t)$为定义3中的位移, 对于任意的$t_1,t_2\in\Sigma$, 都有

$$|d(t_1)-d(t_2)|\leqslant K|t_1-t_2|\quad(K\text{为正常数}),$$

则对任意的$F\in H(\Sigma,\alpha)$, 有

$$\|F(d)\|_\alpha\leqslant(1+K^\alpha)\|F\|_\alpha.$$

由定理1和引理3, 易得:

定理2 在定理1的条件下, 对任意的$F\in H(\Sigma,\alpha)$, 有

$$\Big\|PF(d)\pm\frac{F(d)}{2}\Big\|_\alpha\leqslant J_3\|F\|_\alpha,$$

其中 $J_3=J_2(1+K^\alpha)$ 为正常数.

定理 3　在问题 1 中, $L(t,\Phi^{(1)},\Phi^{(2)},\Phi^{(3)},\Phi^{(4)})$ 满足 Lipschitz 条件:

$$|L(t_1,\Phi_1^{(1)},\Phi_1^{(2)},\Phi_1^{(3)},\Phi_1^{(4)})-L(t_2,\Phi_2^{(1)},\Phi_2^{(2)},\Phi_2^{(3)},\Phi_2^{(4)})|\leqslant J_4|t_1-t_2|^\alpha+J_5|\Phi_1^{(1)}-\Phi_2^{(1)}|+ J_6|\Phi_1^{(2)}-\Phi_2^{(2)}|+\cdots+J_8|\Phi_1^{(4)}-\Phi_2^{(4)}|, \tag{9}$$

其中 $J_4, J_5,\cdots, J_8$ 是与 $t_j, \Phi_j^{(1)},\cdots,\Phi_j^{(4)}(j=1,2)$ 无关的正常数, 设

$$L(0,0,0,0,0)=0,\qquad \|G\|_\alpha\leqslant\delta,$$

$$0<N=J_0[J_2\|A+C\|_\alpha+\|1+A\|_\alpha+J_3\|B+D\|_\alpha+(1+K^\alpha)\|B\|_\alpha]<1,$$

则当 $0<\delta<\dfrac{M(1-N)}{J_0(J_{13}+J_{14}M)}$ 时, 问题 1 可解, 其解的积分表达式由式(2)给出; M 是正常数($\|F\|_\alpha\leqslant M$).

证明: 记连续函数空间 $C(\Sigma)$ 的集合:

$$T=\{F|F\in H(\Sigma,\alpha),\|F\|_\alpha\leqslant M\}.$$

由式(6)~(8)、定理 1、定理 2 和引理 3, 有

$$\|SF\|_\alpha\leqslant J_0[J_2\|A+C\|_\alpha+\|1+A\|_\alpha+J_3\|B+D\|_\alpha+(1+K^\alpha)\|B\|_\alpha]M+J_0\delta\|L\|_\alpha,$$

而对 $\|L\|_\alpha$, 由式(3),(5)和(9), 有

$$\begin{aligned}C(L,\Sigma)&=\max_{t\in\Sigma}|L(t,\Phi^+,\Phi^-,\Phi^+(d),\Phi^+(d))-L(0,0,0,0,0)|\leqslant\\&J_4|t|^\alpha+J_5|\Phi^+|+J_6|\Phi^-|+J_7|\Phi^+(d)|+J_8|\Phi^-(d)|\leqslant\\&J_9+J_{10}M,\end{aligned}\tag{10}$$

式中:

$$J_9=\max_{t\in\Sigma}J_4|t|^\alpha;\qquad J_{10}=(J_5+J_6)J_2+(J_7+J_8)J_3.$$

由于

$$\begin{aligned}&|L(t_1,\Phi_1^{(1)},\Phi_1^{(2)},\Phi_1^{(3)},\Phi_1^{(4)})-L(t_2,\Phi_2^{(1)},\Phi_2^{(2)},\Phi_2^{(3)},\Phi_2^{(4)})|\leqslant\\&[J_4+J_5\|\Phi^{(1)}\|_\alpha+\cdots+J_8\|\Phi^{(4)}\|_\alpha]|t_1-t_2|^\alpha\leqslant\\&[J_4+((J_5+J_6)J_2+(J_7+J_8)J_3)M]|t_1-t_2|^\alpha,\end{aligned}$$

故

$$H(L,\Sigma,\alpha)\leqslant J_{11}+J_{12}M. \tag{11}$$

综合式(10)和(11), 有

$$\|L\|_\alpha\leqslant J_{13}+J_{14}M.$$

因此

$$\|SF\|_\alpha\leqslant NM+J_0\delta(J_{13}+J_{14}M)\leqslant M,$$

即 S 是映 T 到自身的映射.

任取 $F^{(n)}(t)\in T$, 设 $\{F^{(n)}(t)\}$ 一致收敛于 $F(t)$, $t\in\Sigma$, 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大时, 有

$$\|F^{(n)}-F\|_\alpha<\frac{\varepsilon}{J_1}.$$

由式(4), 有

$$|PF^{(n)}-PF|\leqslant\|P(F^{(n)}-F)\|_\alpha\leqslant J_1\|F^{(n)}-F\|_\alpha<\varepsilon. \tag{12}$$

综合式(7),(9)和(12)可知, 当 n 充分大时, 对任意的 $t\in\Sigma$, 有 $|SF^{(n)}-SF|<\varepsilon$, 即 S 是映射 T 到自身的连续映射. 根据 Arzela-Ascoli 定理知, T 是连续映射空间 $C(\Sigma)$ 中的紧集. 因此 S 映射 $C(\Sigma)$ 中的闭凸集 T 到自身, 并且 $S(T)$ 也是 $C(\Sigma)$ 中的紧集, 由 Schauder 不动点原理[14]知, 至少存在一个 $F_0\in H(\Sigma,\alpha)$ 适合方程(7), 从而问题 1 至少存在一个解, 且此解可由式(2)给出.

定理 4　在定理 3 中, 若 $L=1$, 则问题 1 有唯一解.

证明: 利用压缩映射原理易证.

参考文献

[1] Brackx F, Delange R, Sommon F. Clifford Analysis [M]. London: Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[2] HUANG Sha. Nonlinear Boundary Value Problem for Biregular Functions in Clifford Analysis [J]. Science in China: Ser A, 1996, 26(3): 227-236. (黄沙. Clifford 分析中双正则函数的非线性边值问题 [J]. 中国科学: A 辑, 1996, 26(3): 227-236.)

[3] Eriksson S L, Leutwiler H. Hypermonogenic Functions [J]. Clifford Algebra and Their Applications in Mathematical Physics, 2002, 2: 287-302.

[4] Eriksson S L, Leutwiler H. Hypermonogenic Functions and Mobius Transformations [J]. Advances in Applied Clifford Algebra, 2001, 11(2): 67-76.

[5] QIAO Yu-ying. A Boundary Value Problem for Hypermonogenic Functions in Clifford Analysis [J]. Science in China Ser A: Mathematics, 2005, 48(Suppl): 324-332.

[6] TANG Huo, LI Shu-hai, MA Li-na. Linear Boundary Value Problem for k Regular Functions in Clifford Analysis [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2011, 49(3): 462-464. (汤获, 李书海, 马丽娜. Clifford 分析中 k 正则函数的线性边值问题 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2011, 49(3): 462-464.)

[7] HUANG Hua-ping, LI Xing. k-Hypermonogenic Functions in Clifford Analysis [J]. Journal of Ningxia University: Natural Science Edition, 2007, 28(1): 1-4. (黄华平, 李星. Clifford 分析中 k-超正则函数 [J]. 宁夏大学学报: 自然科学版, 2007, 28(1): 1-4.)

[8] YUAN Hong-fen, QIAO Yu-ying. Properties of k-Hypermonogenic Functions and Their Relative Functions [J]. Acta Mathematica Scientia, 2009, 29A(3): 716-726. (袁洪芬, 乔玉英. k-超正则函数及其相关函数的性质 [J]. 数学物理学报, 2009, 29A(3): 716-726.)

[9] YANG Liu. Riemann Boundary Value Problem for k-Hypermonogenic Functions in Clifford Analysis [J]. Journal of Naval University of Engineering, 2008, 20(2): 22-26. (杨柳. Clifford 分析中 k-超正则函数的 Riemann 边值问题 [J]. 海军工程大学学报, 2008, 20(2): 22-26.)

[10] TANG Huo, LI Xing. A Nonlinear Boundary Value Problem with Conjugate Value for Regular Functions on Unbounded Domains in Real Clifford Analysis [J]. Journal of Shaoxing University, 2006, 26(9): 13-17. (汤获, 李星. Clifford 分析中无界域上正则函数带共轭值带位移的非线性边值问题 [J]. 绍兴文理学院学报, 2006, 26(9): 13-17.)

[11] TANG Huo, LI Xing. A Nonlinear Boundary Value Problem with Shift for Regular Function Vectors on Unbounded Domains [J]. Journal of Ningxia University: Natural Science Edition, 2007, 28(2): 103-106. (汤获, 李星. 无界域上正则函数向量带位移的非线性边值问题 [J]. 宁夏大学学报: 自然科学版, 2007, 28(2): 103-106.)

[12] TANG Huo. A Boundary Value Problem with Conjugate Value and Shift for k Regular Functions [J]. Journal of Ningxia University: Natural Science Edition, 2010, 31(4): 305-308. (汤获. k 正则函数的一个带共轭值带位移的边值问题 [J]. 宁夏大学学报: 自然科学版, 2010, 31(4): 305-308.)

[13] 李星. 积分方程 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[14] 张石生. 不动点理论及应用 [M]. 重庆: 重庆出版社, 1984.

(责任编辑: 赵立芹)