

# Lagrange 三次有限体积元法的超收敛现象

丁玉琼<sup>1</sup>, 左平<sup>2</sup>

(1. 吉林大学 数学研究所, 长春 130012; 2. 空军航空大学 基础部, 长春 130022)

**摘要:** 基于三角形网上求解 Poisson 方程的 Lagrange 三次有限体积元法, 给出了超收敛性的数值结果. 数值实验表明, 在三角形单元的对称点(即3边中点和3个角顶点)上, 数值解平均梯度的收敛阶约为4阶, 比按  $H^1$  模的收敛阶( $O(h^3)$ )约高一阶.

**关键词:** 有限体积元法; Lagrange 三次元; 对偶剖分; 超收敛

**中图分类号:** O241.82    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1671-5489(2011)02-0159-05

## Superconvergence Phenomenon for Lagrange Cubic Finite Volume Element Method

DING Yu-qiong<sup>1</sup>, ZUO Ping<sup>2</sup>

(1. Institute of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China;

2. Department of Foundation, Aviation University of Air Force, Changchun 130022, China)

**Abstract:** Based on the Lagrangian cubic element finite volume method for Poisson equation on triangular meshes constructed by us, we found that the convergence rate of average gradient of the numerical solutions is approximately 4 order at the symmetrical points of triangular element (i. e. midpoints of three edges and three vertices) through the numerical experiments, which is nearly one order higher than that of the  $H^1$  norm ( $O(h^3)$ ).

**Key words:** finite volume element method; Lagrange cubic basis; dual partition; superconvergence

由于有限体积元法(FVEM)<sup>[1]</sup>能保持物理量的局部守恒性, 因此在流体力学、流体动力学和电磁学等领域应用广泛. 关于有限体积元法的研究目前已有许多成果<sup>[2-8]</sup>.

椭圆型方程有限体积元法的构造, 涉及原始剖分和试探函数空间, 以及对偶剖分和检验函数空间, 通过对偶单元上用 Green 公式并对对偶单元求和即可得到有限体积元法的双线性形式. 三角网上的线性有限体积元法结果可参见文献[6]. 文献[3-4, 7]描述了椭圆方程的 Lagrange 二次有限体积元法, 分别用不同的方法给出了双线性形式的正定性分析. 对于三次元格式, 文献[2]构造了三角形网上的 Hermite 三次有限体积元法, 并给出了正定性和  $H^1$  模收敛阶的证明; 文献[9]构造了三角形网上的 Lagrange 三次有限体积元法, 并给出了稳定性分析和  $H^1$  模误差估计.

目前, 关于超收敛性的研究大多数是对有限元方法的研究<sup>[10-12]</sup>, 而对于有限体积元法的研究结果较少. 文献[13]给出了对于两点边值问题线性有限体积元法的超收敛性分析; 文献[14]研究了二阶椭圆方程线性有限体积元法的超收敛; 文献[15]给出了两点边值问题的基于应力佳点上的二次有限体积元法, 并给出了在应力佳点处数值解导数的超收敛估计; 文献[16]提出了求解 Poisson 方程的一种新的双二次有限体积元法, 其主要特点是取应力佳点作为对偶单元的节点, 证明了新方法具有最优的  $H^1$

收稿日期: 2010-08-31.

作者简介: 丁玉琼(1985—), 女, 汉族, 博士研究生, 从事偏微分方程有限体积法的研究, E-mail: qiongkathy@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10971082).

模和  $L^2$  模误差估计, 并给出了在应力佳点数值梯度的超收敛性估计. 对于求解椭圆型方程四边形网上的高次有限体积元法也有了相应的超收敛性分析, 而对于三角形网上的高次有限体积元法的超收敛性分析目前尚未见文献报道. 本文介绍了求解 Poisson 方程的 Lagrange 三次有限体积元法的构造, 给出了超收敛性的数值结果, 表明在三角形对称点上数值解的平均梯度的收敛阶比按  $H^1$  模的收敛阶约高一阶. 但由于高次有限体积元法超收敛的证明相当困难, 并不能完全模仿相应的有限元方法<sup>[11]</sup>, 故本文未能给出理论证明, 有待进一步研究.

### 1 Lagrange 三次有限体积元法

设  $\Omega \subset R^2$  为有界凸区域, 考虑 Poisson 方程第一边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ u = 0, & (x,y) \in \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

文献[9]给出了求解问题(1)三角网上的 Lagrange 三次有限体积元法: 取节点为单元三角形角顶点、边三等分点及重心点, 作原始剖分  $\mathcal{T}_h$ , 如图 1 所示. 在剖分  $\mathcal{T}_h$  的任一单元  $K_Q$  上, 通过连接各单元节点把  $K_Q$  划分为 9 个小三角形, 然后在小三角形上做重心对偶剖分  $\mathcal{T}_h^*$ , 做法如同线性 Lagrange 有限体积元法的心对偶剖分. 用  $\bar{\Omega}_h$  表示剖分  $\mathcal{T}_h$  的节点集合,  $\dot{\Omega}_h = \bar{\Omega}_h \setminus \partial\Omega$  表示内节点集合. 对于  $P_0 \in \bar{\Omega}_h \setminus \partial\Omega$ , 记围绕  $P_0$  的对偶单元为  $K_{P_0}^*$ , 如图 2 阴影部分所示.

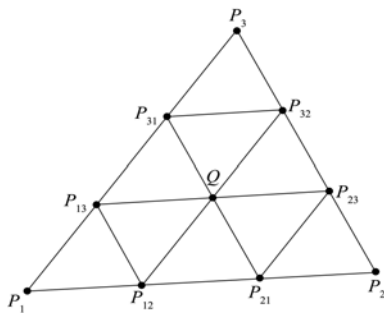


图 1 单元  $K_Q$  和单元节点

Fig. 1 Element  $K_Q$  and element nodes

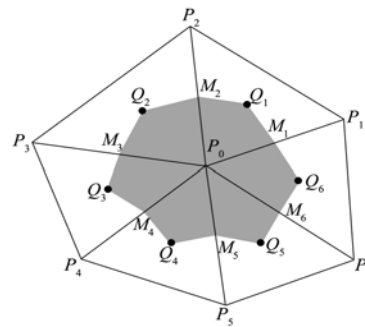


图 2 对偶单元  $K_{P_0}^*$

Fig. 2 Dual element  $K_{P_0}^*$

取试探函数空间  $U_h$  为相应于原始剖分  $\mathcal{T}_h$  的三次有限元空间, 即

$$U_h = \{u_h \mid u_h \in C(\Omega), u_h|_K \text{ 为三次多项式, 完全由 10 个单元节点上的值确定, } \forall K \in \mathcal{T}_h, u_h|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (2)$$

显然  $U_h \in U = H_0^1(\Omega)$ . 对任意的  $P_0 \in \dot{\Omega}_h$ , 相应的基函数为分片三次多项式满足以下插值条件:

$$\varphi_{P_0}(P) = \begin{cases} 1, & P = P_0, \\ 0, & P \in \bar{\Omega}_h \setminus \{P_0\}, \end{cases} \quad (3)$$

故  $U_h = \text{span}\{\varphi_{P_0}; P_0 \in \dot{\Omega}_h\}$ .

对  $u_h \in U_h$ , 记  $u_p = u_h(P)$ , 则在单元  $K_Q$  上, 有

$$u_h = \sum_{l=1,2,3} (u_{P_l} \varphi_{P_l} + u_{P_{l+1}} \varphi_{P_{l+1}} + u_{P_{l+2}} \varphi_{P_{l+2}}) + u_Q \varphi_Q. \quad (4)$$

借助三角单元上的面积坐标  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  可得 Lagrange 三次有限元函数  $u_h$  在一个单元上的表达式为

$$u_h = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3 u_Q + \left( \lambda_1^3 - \frac{5}{2}\lambda_1^2\lambda_2 - \frac{5}{2}\lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \right) u_{P_1} + \left( \lambda_2^3 - \frac{5}{2}\lambda_2^2\lambda_1 - \frac{5}{2}\lambda_2\lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \right) u_{P_2} +$$

$$\begin{aligned} & \left( \lambda_3^3 - \frac{5}{2} \lambda_3^2 \lambda_1 - \frac{5}{2} \lambda_3^2 \lambda_2 + \lambda_3 \lambda_1^2 + \lambda_3 \lambda_2^2 + 2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right) u_{P_3} + \\ & 9 \left( \lambda_1^2 \lambda_2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right) u_{P_{1,2}} + 9 \left( \lambda_2^2 \lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 \lambda_1^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right) u_{P_{2,1}} + \\ & 9 \left( \lambda_2^2 \lambda_3 - \frac{1}{2} \lambda_2 \lambda_3^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right) u_{P_{2,3}} + 9 \left( \lambda_3^2 \lambda_2 - \frac{1}{2} \lambda_3 \lambda_2^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right) u_{P_{3,2}} + \\ & 9 \left( \lambda_3^2 \lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_3 \lambda_1^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right) u_{P_{3,1}} + 9 \left( \lambda_1^2 \lambda_3 - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_3^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right) u_{P_{1,3}}. \end{aligned}$$

检验函数空间  $V_h$  取为相应于对偶剖分  $\mathcal{F}_h^*$  的分片常数函数空间, 由下列基函数张成: 相应于点  $P_0 \in \hat{\Omega}_h$  的基函数

$$\psi_{P_0}(P) = \begin{cases} 1, & P \in K_{P_0}^*, \\ 0, & P \notin K_{P_0}^*. \end{cases}$$

对任一  $v_h \in V_h$ , 可表示为

$$v_h = \sum_{P_0 \in \hat{\Omega}_h} v_h(P_0) \psi_{P_0}. \tag{5}$$

采用前面所取的试探函数空间  $U_h$  和检验函数空间  $V_h$ , 则求解 Poisson 方程的 Lagrange 三次有限体积元法可描述为: 求  $u_h \in U_h$ , 使得

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= \sum_{P_0 \in \hat{\Omega}_h} v_h(P_0) a(u_h, \psi_{P_0}), \\ a(u_h, \psi_{P_0}) &= - \int_{\partial K_{P_0}^*} \frac{\partial u_h}{\partial n} ds, \\ (f, v_h) &= \sum_{P_0 \in \hat{\Omega}_h} \int_{K_{P_0}^*} f v_h dx dy. \end{aligned} \tag{7}$$

## 2 收敛性及超收敛性的数值算例

文献[9]给出了求解 Poisson 方程的 Lagrange 三次有限体积元法的稳定性分析和按  $H^1$  模的误差估计, 可归结为如下注记:

**注 1** 对任意的  $K_Q \in \mathcal{F}_h$ , 若三角单元最小角  $\theta_0 \geq 17.25^\circ$ , 则  $a(u_h, \Pi_h^* u_h)$  正定, 即对  $\alpha > 0$ , 有

$$a(u_h, \Pi_h^* u_h) \geq \alpha \|u_h\|_1^2, \quad \forall u_h \in U_h, \tag{8}$$

其中  $\Pi_h^*$  是试探函数空间  $U_h$  向检验函数空间  $V_h$  的插值投影.

**注 2** 设  $u$  是问题(1)的广义解,  $u_h$  是有限体积法(6)的解. 若  $u \in H^4(\Omega)$ , 则有误差估计:

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch^3 |u|_4. \tag{9}$$

由注 2 可见按  $H^1$  模的收敛阶为最佳阶  $O(h^3)$ , 数值实验计算表明, 在一些特殊点上, 导数逼近误差有更高的精度, 这种现象称为超收敛现象.

记三角形单元 3 个顶点及 3 条边中点的集合为  $S_h$ , 称为对称点集合. 文献[10]证明了求解 Poisson 方程的三次有限元法在对称点上数值解的平均梯度有超收敛性估计:

**引理 1** 设  $\Omega$  是二维有界域, 剖分在内子域  $\Omega_\lambda = \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \lambda > 0\}$  上是均匀的. 设  $u \in H^4(\Omega) \cap W^{5,\infty}(\Omega_\lambda)$ , 且  $u_h \in U_h$  是  $u$  的三次有限元投影, 则对于  $z \in S_h \cap \Omega_\lambda$ , 有

$$|\overline{\nabla}(u - u_h)(z)| = O(h^4 \ln h). \tag{10}$$

数值实验表明, 求解 Poisson 方程的 Lagrange 三次有限体积元法有如下超收敛现象:

**注 3** 在三角形单元的对称点处, 平均梯度的收敛阶约为 4 阶, 比按  $H^1$  模的收敛阶约高一阶.

目前尚未得到求解 Poisson 方程的 Lagrange 三次有限体积元法的超收敛性现象的理论分析. 下面针对两个例子, 分别给出求解 Poisson 方程的 Lagrange 三次有限体积元法和三次有限元法的数值算例,

数值结果包括按  $H^1$  模的误差和在三角单元对称点上数值解的平均梯度的超收敛结果. 本文的数值解平均梯度按如下度量计算:

$$\left( \frac{1}{r} \sum_{z \in S_h} |\overline{\nabla}(u - u_h)(z)|^2 \right)^{1/2},$$

其中:  $S_h$  是三角单元的对称点集;  $\overline{\nabla}$  是梯度  $\nabla$  的平均值;  $r$  是  $S_h$  中点的个数.

### 例 1

$$u(x, y) = \sin(2x) \sin(5y). \quad (11)$$

### 例 2

$$u(x, y) = y^3(\pi - x)^2(\pi - y)^2 \sin(x). \quad (12)$$

在区域  $\Omega := (0, \pi) \times (0, \pi)$  上考虑 Poisson 方程, 将区域  $\overline{\Omega} := [0, \pi] \times [0, \pi]$  分成  $N \times N$  个小正方形, 然后通过连接小正方形的对角线得到一个三角分划. 数值实验结果分别列于表 1 ~ 表 4.

表 1 例 1 有限体积元法数值结果

Table 1 Numerical results of finite volume element method for example 1

$N$	$ u - u_h _1$	收敛阶	误差的平均梯度模	收敛阶
4	1.758 0		0.980 7	
8	0.261 6	2.748 3	0.142 6	2.782 2
16	0.033 4	2.969 0	0.010 6	3.754 5
32	0.004 2	2.999 5	$6.856 4 \times 10^{-4}$	3.945 5
64	$5.217 8 \times 10^{-4}$	3.001 4	$4.330 1 \times 10^{-5}$	3.985 0
128	$6.518 2 \times 10^{-5}$	3.000 9	$2.719 7 \times 10^{-6}$	3.992 9

表 2 例 2 有限体积元法数值结果

Table 2 Numerical results of finite volume element method for example 2

$N$	$ u - u_h _1$	收敛阶	误差的平均梯度模	收敛阶
4	2.786 5		1.033 4	
8	0.389 9	2.837 4	0.086 2	3.584 3
16	0.049 4	2.980 2	0.006 1	3.828 2
32	0.006 1	3.007 2	$4.078 9 \times 10^{-4}$	3.894 4
64	$7.636 8 \times 10^{-4}$	3.008 4	$2.732 3 \times 10^{-5}$	3.900 0
128	$9.509 3 \times 10^{-5}$	3.005 5	$1.881 9 \times 10^{-6}$	3.859 8

表 3 例 1 有限元法数值结果

Table 3 Numerical results of finite element method for example 1

$N$	$ u - u_h _1$	收敛阶	误差的平均梯度模	收敛阶
4	1.421 6		0.581 1	
8	0.207 3	2.777 9	0.100 9	2.526 1
16	0.026 1	2.987 5	0.007 7	3.704 0
32	0.003 3	3.006 6	$5.061 9 \times 10^{-4}$	3.934 7
64	$4.053 8 \times 10^{-4}$	3.003 9	$3.204 8 \times 10^{-5}$	3.981 4
128	$5.060 8 \times 10^{-5}$	3.001 8	$2.016 5 \times 10^{-6}$	3.990 3

表 4 例 2 有限元法数值结果

Table 4 Numerical results of finite element method for example 2

$N$	$ u - u_h _1$	收敛阶	误差的平均梯度模	收敛阶
4	2.381 0		0.719 4	
8	0.330 3	2.849 7	0.062 1	3.534 8
16	0.041 6	2.989 2	0.004 5	3.793 1
32	0.005 2	3.000 1	$3.067 6 \times 10^{-4}$	3.874 7
64	$6.463 5 \times 10^{-4}$	3.008 1	$2.732 3 \times 10^{-5}$	3.898 8
128	$8.049 0 \times 10^{-5}$	3.005 4	$1.423 8 \times 10^{-6}$	3.852 4

由表1~表4可见, 本文讨论的求解 Poisson 方程的 Lagrange 三次有限体积元格式的解按  $H^1$  模的收敛阶为3阶, 数值解的平均梯度在对称点上有超收敛现象, 收敛阶约为4阶, 比按  $H^1$  模的收敛阶约高一阶, 这与求解 Poisson 方程的三次有限元法的超收敛性质一致, 即三次有限元法的超收敛性质能被三次有限体积元法继承. 但目前还不能给出求解 Poisson 方程的 Lagrange 三次有限体积元法超收敛现象的理论证明.

### 参 考 文 献

- [1] LI Rong-hua, Chen Z Y, WU Wei. Generalized Difference Methods for Differential Equations: Numerical Analysis of Finite Volume Element Methods [M]. New York: Mekker, 2000.
- [2] Chen Z Y. The Error Estimate of Generalized Difference Method of 3rd-Order Hermite Type for Elliptic Partial Differential Equations [J]. Northeastern Math J, 1992, 8: 127-135.
- [3] Tian M Z, Chen Z Y. Quadratic Element Generalized Difference Methods for Elliptic Equations [J]. Numer Math J Chinese Universities, 1991, 2: 99-113.
- [4] Liebau F. The Finite Volume Element Method with Quadratic Basis Functions [J]. Computing, 1996, 57(4): 281-299.
- [5] LI Yong-hai, LI Rong-hua. Generalized Difference Methods on Arbitrary Quadrilateral Networks [J]. J Comput Math, 1999, 17(6): 653-672.
- [6] Li R H, Zhu P Q. Generalized Difference Methods for Second Order Elliptic Partial Differential Equations ( I ): Triangle Grids [J]. Numer Math J Chinese Universities, 1982, 2: 140-152.
- [7] XU Jin-chao, ZOU Qing-song. Analysis of Linear and Quadratic Simplicial Finite Volume Methods for Elliptic Equations [J]. Numer Math, 2009, 111(3): 469-492.
- [8] LÜ Jun-liang, LI Yong-hai.  $L^2$ -Estimate of the Finite Volume Element Methods on Quadrilateral Meshes [J]. Adv Comput Math, 2010, 33(2): 129-148.
- [9] DING Yu-qiong. Some Researches of High Order Finite Volume Element Method for Second Order Elliptic Equation [D]: [Master's Degree Thesis]. Changchun: College of Mathematics, Jilin University, 2010. (丁玉琼. 解二阶椭圆型方程的高次有限体积元法的若干研究 [D]: [硕士学位论文]. 长春: 吉林大学数学学院, 2010.)
- [10] 陈传森. 有限元超收敛构造理论 [M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2001.
- [11] CHEN Chuan-miao. Superconvergence for Triangular Finite Elements [J]. Chinese Science Bulletin; Ser A, 1999, 42(9): 917-924.
- [12] Wahlbin L B. Superconvergence in Galerkin Finite Element Methods [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
- [13] Chen Z Y. Superconvergence of Generalized Difference Methods for Elliptic Boundary Value Problem [J]. Numer Math J Chinese Univ; English Series, 1994, 3(2): 163-171.
- [14] Chou S H, YE Xiu. Superconvergence of Finite Volume Methods for the Second Order Elliptic Problem [J]. Comput Meth Appl Mech Engineering, 2007, 196(37/38/39/40): 3706-3712.
- [15] YU Chang-hua, LI Yong-hai. Quadratic Finite Volume Element Method Based on Optimal Stress Points for Solving Two-Point Boundary Value Problems [J]. Journal of Jilin University; Science Edition, 2009, 47(4): 639-648. (于长华, 李永海. 解两点边值问题的基于应力佳点的二次有限体积元法 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2009, 47(4): 639-648.)
- [16] YU Chang-hua, LI Yong-hai. Biquadratic Element Finite Volume Method Based on Optimal Stress Points for Solving Poisson Equations [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2010, 32(1): 59-74. (于长华, 李永海. 解 Poisson 方程的基于应力佳点的双二次有限体积元法 [J]. 计算数学, 2010, 32(1): 59-74.)