研究简报

平衡隐式方法的均方 A-稳定条件

牟 育, 吕显瑞, 王 鹏
(吉林大学 数学学院, 长春 130012)

摘要: 讨论求解 Itô 随机微分方程的平衡隐式方法, 给出了该方法的均方稳定性与检验问题稳定性间的关系, 并通过比较给出了证明平衡隐式方法的 A-稳定条件.
关键词: 随机微分方程; 平衡隐式方法; 均方稳定性; A-稳定性
中图分类号: O241.8 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)01-0076-03

Conditions of Mean-Square A-Stability of Balanced Implicit Methods

MU Yu, LÜ Xian-rui, WANG Peng
(*College of Mathematics, Jilin University, Changchun* 130012, *China*)

Abstract: We discussed balanced implicit method for solving Itô stochastic differential equations (SDEs). The mean-square stability of one method and the relation between the stabilities of method and problem were also discussed. The conditions of A-stability of balanced implicit methods were given.
Key words: stochastic differential equation; balanced implicit method; mean-square stability; A-stablity

随机微分方程理论广泛应用于物理、化学、生物、经济和金融等各个领域. 目前, 关于随机微分方程数值方法及其数值稳定性的研究已取得许多成果[1-8].

考虑 Itô 随机微分方程:

$$\mathrm{d}X(t) = f(X(t))\mathrm{d}t + g(X(t))\mathrm{d}W(t), \quad T > t > 0, \quad X(0) = X_0, \tag{1}$$

其中: $f(X(t))$ 为漂移项系数; $g(X(t))$ 为扩散项系数, 且二阶可微; $W(t)$ 为 Winner 过程, 其增量

$$\Delta W(t) = W(t+\Delta t) - W(t)$$

是满足 $N(0,\Delta t)$ 的随机变量. 文献[1]给出了使用 $X_n \approx X(n)$, 与 $t_n = n\Delta t$ 逼近算法的平衡隐式方法, 形如

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t f(X_n) + \Delta t^{1/2} g(X_n) V_n + C_n(X_n - X_{n+1}), \tag{2}$$

其中: V_n 为独立的正态随机变量, 服从 $N(0,1)$ 分布; $C_n = C_0 \Delta t + C_1 |\Delta t^{1/2} V_n|$, C_0, C_1 为任意复数; $\Delta t > 0$为步长, 即 $\Delta t = t_{n+1} - t_n = T/n$. 本文仅讨论 $C_1 = 0$ 的情况.

为研究式(2)的稳定性, 本文在式(1)中引入检验问题$f(X(t)) = \lambda X(t)$和 $g(X(t)) = \mu X(t)$, 即

$$\mathrm{d}X(t) = \lambda X(t)\mathrm{d}t + \mu X(t)\mathrm{d}W(t), \quad T > t > 0, \quad X(0) = X_0, \tag{3}$$

其中 λ, μ 为复数. 假设 $X_0 \neq 0$ 以概率1成立. 如果 $\lim\limits_{t\to\infty} E(|X(t)|^2) = 0$, 则式(3)的零解称为均方稳定的, 其中 $E(\cdot)$ 表示取期望值. 由文献[3-4]知, 式(3)的均方稳定等价于

收稿日期: 2010-04-14.
作者简介: 牟 育(1987—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事应用数学的研究, E-mail: ffantasy37@sina.com. 通讯作者: 王 鹏(1977—), 男, 汉族, 博士, 讲师, 从事随机微分方程数值分析的研究, E-mail: pwang@jlu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10926158; J0730101).

$$\mathscr{R}\{\lambda\} + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0. \tag{4}$$

对于检验问题(3)使用方法(2), 可得

$$X_{n+1} = (p + qV_n)X_n, \tag{5}$$

其中:

$$p := \frac{1 + C_0\Delta t + \Delta t\lambda}{1 + C_0\Delta t}; \qquad q := \frac{\Delta t^{1/2}\mu}{1 + C_0\Delta t}; \tag{6}$$

并且假设 $1 + C_0\Delta t \neq 0$. 仿照连续问题(3)的定义, 对某些 λ, μ 和 Δt, 如果 $\lim\limits_{t\to\infty} E(|X(t)|^2) = 0$, 则称此方法是均方稳定的. 可用标准数值分析的方法并比较检验问题与数值方法的均方稳定性质.

假设 $\mu = 0$, 则式(3)简化为经典的确定性检验问题. 在这种情况下, 稳定条件(4)变为 $\mathscr{R}\{\lambda\} < 0$. 如果问题稳定$\Rightarrow$方法稳定($\forall \Delta t$), 则称该数值方法是 A-稳定的.

对式(5)取模, 平方后求期望, 再由 $E(V_n) = 0$, $E(V_n^2) = 1$, 可得

$$E(|X_{n+1}|^2) = (|p|^2 + |q|^2)E(|X_n|^2),$$

即均方稳定等价于

$$|p|^2 + |q|^2 < 1. \tag{7}$$

利用式(6), 参数 λ, μ, C_0 及步长 Δt, 将式(7)改写为

$$\mathscr{R}\{\lambda\} + \frac{1}{2}|\mu|^2 + \Delta t\left(\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\} + \frac{1}{2}|\lambda|^2\right) < 0. \tag{8}$$

由式(4)知, 式(8)的左端前两项控制了检验问题的均方稳定性, 从而步长及第三项 $\Delta t\left(\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\} + \frac{1}{2}|\lambda|^2\right)$的符号决定了与检验问题相对应方法的稳定性.

定理 1　考虑应用于检验问题(3)的方法(2), 并令

$$\Delta t_s := \left|\frac{\mathscr{R}\{\lambda\} + |\mu|^2/2}{\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\} + |\lambda|^2/2}\right|. \tag{9}$$

若 $\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\} + \frac{1}{2}|\lambda|^2 \geqslant 0$(漂移项控制), 则:

(i) 问题不稳定$\Rightarrow$方法不稳定($\forall \Delta t$);

(ii) 问题稳定$\Rightarrow$方法稳定($\Delta t < \Delta t_s$).

若 $\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\} + \frac{1}{2}|\lambda|^2 < 0$(扩散项控制), 则:

(iii) 问题不稳定$\Rightarrow$方法不稳定($\Delta t < \Delta t_s$);

(iv) 问题稳定$\Rightarrow$方法稳定($\forall \Delta t$).

证明: 若 $\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\} + \frac{1}{2}|\lambda|^2 \geqslant 0$, 且 $\mathscr{R}\{\lambda\} + \frac{1}{2}|\mu|^2 \geqslant 0$, 则式(8)必不成立. (i)得证.

若 $\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\} + \frac{1}{2}|\lambda|^2 \geqslant 0$, 且 $\mathscr{R}\{\lambda\} + \frac{1}{2}|\mu|^2 < 0$, 则式(8)的左端由二者的绝对值之比决定. 当 $\Delta t < \Delta t_s$ 时,

$$\left|\Delta t\left(\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\} + \frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\right| < \left|\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\} + \frac{1}{2}|\lambda|^2\right|,$$

式(8)必成立. (ii)得证.

若 $\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\} + \frac{1}{2}|\lambda|^2 < 0$, 且 $\mathscr{R}\{\lambda\} + \frac{1}{2}|\mu|^2 \geqslant 0$, 则式(8)的左端由二者的绝对值之比决定. 当 $\Delta t < \Delta t_s$时,

$$\left|\Delta t\left(\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\} + \frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\right| > \left|\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\} + \frac{1}{2}|\lambda|^2\right|,$$

式(8)不成立. (iii)得证.

若$\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\}+\frac{1}{2}|\lambda|^2<0$，且$\mathscr{R}\{\lambda\}+\frac{1}{2}|\mu|^2<0$，则式(8)必成立.（iv)得证.

进一步，考虑 C_0 为实数的情况，(vi)的条件可以得到简化，$\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\}+\frac{1}{2}|\lambda|^2<0$ 化为 $C_0\mathscr{R}\{\lambda\}+\frac{1}{2}|\lambda|^2<0$，必有

$$(C_0\mathscr{R}\{\lambda\})^2>\frac{1}{4}|\lambda|^4,$$

从而

$$C_0^2|\lambda|^2>\frac{1}{4}|\lambda|^4.$$

推论1 当 $C_0\in\mathscr{R}$ 时，稳定条件变为 $C_0^2>\frac{1}{4}|\lambda|^2$.

当 C_0 为复数，λ 为实数时，$\mathscr{R}\{\bar{C}_0\lambda\}+\frac{1}{2}|\lambda|^2<0$，可以化为 $\lambda\mathscr{R}\{C_0\}+\frac{1}{2}\lambda^2<0$. 此时必有 $(\mathscr{R}\{C_0\})^2\lambda^2>\frac{1}{4}\lambda^4$，从而$|C_0|^2\lambda^2>\frac{1}{4}\lambda^4$，即$|C_0|^2>\frac{1}{4}\lambda^2$.

若 C_0 与 λ 均为实数，则由上可知 $C_0^2>\frac{1}{4}\lambda^2$.

衷心感谢吉林大学数学学院李勇教授的鼓励与指导.

参 考 文 献

[1] Milstein G N, Platen E, Schurz H. Balanced Implicit Methods for Stiff Stochastic Systems [J]. SIAM J Numer Anal, 1998, 35(3): 1010-1019.

[2] Buckwar E, Horvath-Bokor R, Winkler R. Asymptotic Mean-Square Stability of Two-Step Methods for Stochastic Ordinary Differential Equations [J]. BIT Numerical Mathematics, 2006, 46(2): 261-282.

[3] Higham D J. A-Stability and Stochastic Mean-Square Stability [J]. BIT Numerical Mathematics, 2000, 40(2): 404-409.

[4] Higham D J. Mean-Square and Asymptotic Stability of the Stochastic Theta Method [J]. SIAM J Numer Anal, 2000, 38(3): 753-769.

[5] Higham D J, MAO Xue-rong, YUAN Cheng-gui. Almost Sure and Moment Exponential Stability in the Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations [J]. SIAM J Numer Anal, 2007, 45(2): 592-609.

[6] Saito Y, Mitsui T. Stability Analysis of Numerical Schemes for Stochastic Differential Equations [J]. SIAM J Numer Anal, 1996, 33(6): 2254-2267.

[7] Alcock J, Burrage K. A Note on the Balanced Method [J]. BIT Numerical Mathematics, 2006, 46: 689-710.

[8] Rodkina A, Schurz H. Almost Sure Asymptotic Stability of Drift-Implicit θ-Methods for Bilinear Ordinary Stochastic Differential Equations in R^1 [J]. J Comput Appl Math, 2005, 180(1): 13-31.