云南大学学报 (自然科学版), 2005, 27 (5): 376～379 CN 53 - 1045/ N ISSN 0258 - 7971
Journal of Yunnan University

带干扰的广义 Poisson 风险模型的破产概率*

何树红, 马丽娟, 赵金娥
(云南大学 数学系, 云南 昆明 650091)

摘要:应用鞅论的方法研究了保险公司在带干扰的广义 Poisson 风险模型下的破产概率问题,得到了模型的破产概率满足的 Lundberg 不等式和一般公式,以及当个体索赔服从指数分布时破产概率的具体表达式.

关键词:广义齐次 Poisson 过程;稀疏过程;布朗运动;干扰;破产概率
中图分类号:O 211.9 **文献标识码**:A **文章编号**:0258 - 7971(2005)05 - 0376 - 04

在经典风险模型中,保险公司按单位时间常数速率取得保单(假定每张保单的保险费相等).但在实际中,不同单位时间内收取的保单数不一样,是一个随机变量,服从某一离散分布.许多文献对经典风险模型进行了推广,把保单到达过程定义为 Poisson 过程,但是,这样定义的模型仍然存在局限性.首先,Poisson 过程具有普遍性,即在充分小的时间内跳跃至多为 1,即至多有一张保单到达,但在现实中,经常会出现同一时刻有两张以上保单到达的情形;其次,保险公司保费收入中的未确定部分(如利息收入、投资收入等)会对公司的盈余产生一定的影响.基于以上 2 种情况,本文对文献[1]进行了推广,建立了一种新的更加符合保险公司实际的风险模型,把保单到达过程定义为广义齐次 Poisson 过程,而把理赔记数过程看作是保单到达过程的 P - 稀疏过程,同时考虑了干扰项,得到了带干扰的广义 Poisson 风险模型.

1 模型的建立

定义 1 齐次泊松过程$\{M(t), t \geq 0\}$称为广义齐次泊松过程,若它的概率母函数

$$G_{M(t)}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p(M(t) = k) s^k = e^{\lambda t (G(s) - 1)},$$

其中 $\lambda \geq 0$ 是一常数, $G(s)$ 是某一正整数值随机变量的概率母函数,即

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k, \text{其中 } p_k \geq 0 \text{ 且 } \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

因为上面的 $G_{M(t)}(s)$ 可由在齐次泊松过程的概率母函数 $e^{\lambda t[s-1]}$ 中用 $G(s)$ 替换 s 而得,故可以设想广义齐次泊松过程经由以下 2 步产生:首先,以给定的 λ 作强度确定一齐次泊松过程$\{m(t), t \geq 0\}$;然后由这一过程确定广义泊松过程$\{M(t), t \geq 0\}$的点(亦即跳跃)发生时刻,在每一个这样的时刻有 k 个点(即跃度为 k 的跳跃)的概率是 $p_k(k = 1,2,3,\cdots)$ 而且各个时刻发生的点数是相互独立的.广义齐次泊松过程有如下的分解表示

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mu^k(t), t \geq 0,$$

其中$\{\mu^k(t), t \geq 0\}(k = 1,2,3,\cdots)$是强度为 λp_k 的相互独立的齐次泊松过程.

引理 1[1] 对于给定的 λ 和 p_k,广义齐次泊松过程$\{M(t), t \geq 0\}$为一复合 Poisson 过程,且 $M(t) = \sum_{i=1}^{m(t)} X_i$,其中:① X_i 为 M 上的离散随机变量,且 $P(X_i = k) = p_k$;② $m(t)$ 是强度为 λ 的齐次 Poisson 过

* 收稿日期:2005 - 02 - 23
基金项目:云南省自然科学基金资助项目(2003F0015M);云南大学理(工)校级科研资助项目(2002Q020SL).
作者简介:何树红(1966 -),男,云南人,博士,教授,主要从事金融数学方面的研究.

程. 令 $E[X_i] = \alpha$,则有:

引理 2　$E[M(t)] = \alpha\lambda t$.

证明　$E[M(t)] = G'_t(s)|_{s=1} = \lambda t e^{\lambda(t)(G(s)-1)} G(s)|_{s=1} = \lambda t E[X_i] = \alpha\lambda t$. 证毕.

定义 2　设 $u > 0, c > 0, \lambda > 0, \alpha > 0, \eta > 0$;给定概率空间 (Ω, F, P), $t \geq 0$,令

$$U(t) = u + cM(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i + \eta W(t), \tag{I}$$

$$S(t) = cM(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i + \eta W(t).$$

u 表示保险公司的初始资本, c 表示每张保单的保险费, $M(t)$ 表示公司在时刻 $(0, t)$ 内收到的保单数,服从参数为 $\lambda\alpha$ 的广义齐次 Poisson 分布; $N(t)$ 是 $(0, t)$ 内的理赔次数,它是保单到达过程 $M(t)$ 的 P - 稀疏过程,即是一个参数为 $p\lambda\alpha$ 的 Poisson 过程[2], p 表示每份保单发生理赔的概率; Z_i 是个体索赔额, Z_i 独立同分布,设 Z_i 的分布函数为 $F(z)$,且 $E[Z_i] = \mu$; $W(t)$ 是一个标准布朗运动,它表示不确定收益对保险公司盈余的影响; η 是干扰因. $\{M(t), t \geq 0\}$, $\{N(t), t \geq 0\}$, $\{W(t), t \geq 0\}$, $\{Z_i, i \geq 1\}$ 是相互独立的. 称此过程 $\{U(t), t \geq 0\}$ 为带干扰的广义 Poisson 风险过程;过程 $\{S(t), t \geq 0\}$ 为盈利过程. 为保证公司的稳定经营,假定 $E[S(t)] > 0$,即 $c > p\mu$,由此定义安全负荷系数 $\theta = \frac{c}{p\mu} - 1 > 0$,以及破产时刻为 $T_u = \inf\{U(t) < 0\}$;最终破产概率为 $\psi(u) = P\{T_u < \infty | U(0) = u\}$. 不失一般性,下面假定 $c = 1$,令 $h(r) = \int_0^\infty e^{rz} \mathrm{d}F(z) - 1$.

2　预备引理

引理 3[3]　盈利过程 $\{S(t), t \geq 0\}$ 是一个右连续随机过程,且具备下列性质:

(1) $E[S(t)] = \alpha\lambda(1 - p\mu)t$;

(2) 具有平稳独立增量;

(3) 存在正数 r,使得 $E[e^{-rS(t)}] < \infty$.

引理 4　对于盈利过程 $\{S(t), t \geq 0\}$,存在函数 $g(r)$,使得 $E[e^{-rS(t)}] = e^{tg(r)}$.

证明

$$E[e^{-rS(t)}] = E\left[\exp\left\{-rM(t) + r\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i - r\eta W(t)\right\}\right] =$$

$$E[\exp(-rM(t))]\,E\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i\right)\right]\,E[\exp(-r\eta W(t))] =$$

$$\exp\left\{\alpha\lambda\left[e^{-r} - 1 + ph(r)\right]t + \frac{\eta^2 r^2}{2}t\right\} = \exp[tg(r)],$$

其中, $g(r) = \alpha\lambda[e^{-r} - 1 + ph(r)] + \frac{\eta^2 r^2}{2}$.

引理 5　方程 $g(r) = 0$ 存在唯一的正解 R,称之为调节系数.

证明　$g(0) = 0$, $\frac{\mathrm{d}g(r)}{\mathrm{d}r} = -\alpha\lambda e^{-r} + \alpha\lambda p\int_0^\infty z e^{rz}\mathrm{d}F(z) + \eta^2 r$, $\left.\frac{\mathrm{d}g(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = -\alpha\lambda + \alpha\lambda p\mu < 0$, $\frac{d^2 g(r)}{\mathrm{d}r^2} = \alpha\lambda e^{-r} + \alpha\lambda p\int_0^\infty z^2 e^{rz}\mathrm{d}F(z) + \eta^2 > 0$, $\lim_{r\to\infty} g(r) = \infty$. 所以 $g(r)$ 在 $(0, \infty)$ 上凹,故存在 $R \in (0, \infty)$,使得 $g(R) = 0$,即方程 $g(r) = 0$ 存在唯一的正根. 证毕.

定义 3　对于盈利过程 $\{S(t), t \geq 0\}$,定义事件流

$F^S = \{F_t^S, t \geq 0\}$,其中 $F_t^S = F_t^N \vee F_t^W \vee F_t^M$.

引理 6　$\{M_u(t) | F_t^S, t \geq 0\}$ 是鞅,其中 $M_u(t) = \frac{\exp[-rU(t)]}{\exp[tg(r)]}$.

证明　对于任意 $v \leq t$,运用引理 4 得

$$E[M_u(t)\mid F_v^S]=E\left[\frac{\exp\{-r[u+S(t)]\}}{\exp[tg(r)]}\middle| F_v^S\right]=$$
$$E\left[\frac{\exp\{-r[u+S(v)]\}}{\exp[vg(r)]}\cdot\frac{\exp[-r(S(t)-S(v))]}{\exp[(t-v)g(r)]}\middle| F_v^S\right]=M_u(v).$$ 证毕.

引理7[3] T_u 是 F^S 停时.

3 主要结果

定理1 在带干扰的广义Poisson风险模型$\{U(t),t\geq 0\}$下,最终破产概率满足下列不等式

$$\psi(u)\leq e^{-Ru},$$

其中 $R=\sup_{r>0}\{r:g(r)\leq 0\}$.

证明 因为 T_u 是 F^S 停时,选取 $t_0<\infty$,易知 $t_0\wedge T_u$ 是 F^S 停时,根据引理7以及可选停时定理有

$$\begin{aligned}e^{-ru}&=M_u(0)=E[M_u(t_0\wedge T_u)]=E[M_u(t_0\wedge T_u)\mid T_u\leq t_0]P\{T_u\leq t_0\}+\\&E[M_u(t_0\wedge T_u)\mid T_u>t_0]P\{T_u>t_0\}\geq E[M_u(t_0\wedge T_u)\mid T_u\leq t_0]P\{T_u\leq t_0\}=\\&E[M_u(T_u)\mid T_u\leq t_0]P\{T_u\leq t_0\},\end{aligned}\tag{1}$$

在$\{T_u<\infty\}$条件下 $u+S(T_u)<0$,故

$$P\{T_u\leq t_0\}\leq\frac{e^{-ru}}{E[M_u(T_u)\mid T_u\leq t_0]}\leq\frac{e^{-ru}}{E[\exp\{-T_ug(r)\}\mid T_u\leq t_0\}]}\leq e^{-ru}\sup_{0\leq t\leq t_0}e^{tg(r)},$$

在上式2端令 $t_0\to\infty$得 $\psi(u)\leq e^{-ru}\sup_{t\geq 0}e^{tg(r)}$,取 $R=\sup_{r>0}\{r:g(r)\leq 0\}$,即证结论. 证毕.

定理2 在带干扰的广义Poisson风险模型下,设 R 为调节系数,则最终破产概率为

$$\psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[\exp\{-RU(T_u)\}T_u<\infty]}.\tag{2}$$

证明 在(2)中取 $r=R$,得

$$e^{-Ru}=E[e^{-RU(T_u)}\mid T_u\leq t_0]P\{T_u\leq t_0\}+E[e^{-RU(T_0)}\mid T_u>t_0]P\{T_u>t_0\}.\tag{3}$$

以 $I(A)$ 表示集合 A 的示性函数,有

$$0\leq E[e^{-RU(T_0)}\mid T_u>t_0]P\{T_u>t_0\}=E[e^{-RU(T_0)}I\{T_u>t_0\}]\leq E[e^{-RU(T_0)}I\{U(t_0)\geq 0\}],$$

由于 $0\leq e^{-RU(T_0)}I\{U(t_0)\geq 0\}\leq 1$,且根据强大数定理可证当 $t_0\to\infty$时,$U(t_0)\to\infty$,因此由控制收敛定理,有

$$\lim_{t_0\to\infty}E[e^{-RU(T_0)}\mid T_u>t_0]P\{T_u>t_0\}=0,$$

于是在(3)式两端令 $t_0\to\infty$,即证结论. 证毕.

当个体索赔额服从指数分布时,易得:

推论1 在带干扰的广义Poisson风险模型$\{U(t),t\geq 0\}$下,若个体索赔额服从参数为 $m>0$ 的指数分布,即 $F(z)=1-e^{-mz}$,广义齐次Poisson过程的参数为 λ,X_i 为$\{1,2\}$上的2点分布,且 $P\{X_i=1\}=\frac{1}{2}$,$P\{X_i=2\}=\frac{1}{2}$,则调节方程 $g(r)=0$ 可化为

$$\lambda e^{-r}+p\lambda\frac{m}{m-r}+\eta^2r^2=\lambda+\lambda p.\tag{4}$$

推论2 在推论1的条件下,广义齐次Poisson风险模型的破产概率为

$$\psi(u)=\frac{m-R}{m}e^{-Ru},$$

其中 R 为方程(4)的正解.

若不考虑干扰项,则模型(Ⅰ)变为

$$U(t)=u+cM(t)-\sum_{i=1}^{N(t)}Z_i.\tag{Ⅱ}$$

此时模型(Ⅱ) 的破产概率满足的 Lundberg 指数 R 是方程 $e^{-r} + p\frac{m}{m-r} = 1 + p$ 的正解[4,5]. 下面通过一个具体的例子计算模型(Ⅰ) ,(Ⅱ) 的 Lundberg 指数 R 的数值解,并进行了比较.

表 1 针对干扰因子 η 和每张保单发生理赔的可能性 p 的不同取值,列出了模型(Ⅰ) 的 Lundberg 指数 R 的值. 其中保单到达速率为 $\alpha\lambda = 20$ 张/天($\alpha = 1/2, \lambda = 40$) ,理赔发生速率为 $p\alpha\lambda = 20p$ 次/天. 假设每张保单的价格 $c = 1$,理赔额服从参数 $m = 0.000\,667$ 的指数分布.

表 1　不同参数值时模型(Ⅰ) 的 Lundberg 指数 R($\times 10^{-3}$)

Tab. 1 The value of R with different parameter in model one

P	η				
	0.2	0.6	1.0	1.3	1.6
0.000 2	0.466 953 22	0.466 952 47	0.466 950 98	0.466 949 37	0.466 947 33
0.000 5	0.166 958 21	0.166 957 54	0.166 956 20	0.166 954 76	0.166 953 60
0.000 6	0.066 979 81	0.066 979 58	0.066 978 02	0.066 978 25	0.066 977 37

表 2 根据每张保单发生理赔的可能性 p 的不同取值列出了模型(Ⅱ) 的 Lundberg 指数 R 的值,其他参数的取值和上表一致.

表 2　不同参数值时模型(Ⅱ) 的 Lundberg 指数

Tab. 2 The value of R with different parameter in model two

p	0.000 2	0.000 5	0.000 6
R($\times 10^{-3}$)	0.466 953 31	0.166 958 29	0.066 979 94

通过该例可以得出 2 个结论: ①模型(Ⅰ) 的 Lundberg 指数比(Ⅱ) 的小,这也就是说在考虑投资收益等干扰因素的条件下,保险公司承担的风险相对较大,因而破产概率要比没有干扰项时的大. ②随着 p 值(即每份保单发生理赔的可能性) 的增大, R 值就减小,相应的破产概率就增大.

参考文献:

[1]　董英华. 广义双 Poisson 风险模型下的破产概率[J]. 长沙铁道学院学报,2003,21(1):97—100.

[2]　陈珊萍,王过京,王振羽. 稀疏过程在保险公司破产问题中的应用[J]. 数理统计与管理,2001,26(5):26—30.

[3]　GRANDELL J. Aspects of risk theory[M]. New York:Spring - Verlag,1991.

[4]　董英华,张汉君. 带干扰的双 Poisson 风险模型的破产概率[J]. 数学理论与应用,2003,23(1):98—101.

[5]　何树红,徐兴富. 双 COX 风险模型[J]. 云南大学学报(自然科学版),2004,26(4):275—278.

Ruin probability in generalized homogeneous poisson process risk model with interference

HE Shu-hong, MA Li-juan, ZHAO Jin-e

(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: Applying martingale theory, the ruin probability in generalized homogeneous Poisson process risk model with interference is researched for insurance firm. The Lundberg inequality and the formula of the ruin probability are got, the explicit formula of the ruin probability is also got in case of exponential claim amounts.

Key words: generalized Poisson process; thinning process; interference; martingale; ruin probability

MSC(2000): 91B30